目　錄

第零章　集合論與拓樸學　1

前半段：集合論 …… 1
0.1　集　合 …… 1
0.2　集合之運算 …… 3
0.3　卡氏乘積 …… 4
0.4　函　數 …… 5
0.5　函數與集合之運算 …… 8
0.6　等價關係 …… 10
後半段：拓樸學 …… 12
0.7　拓　樸 …… 12
0.8　賦矩空間 …… 15
0.9　子空間 …… 16
0.10　乘積拓樸 …… 16
0.11　Hausdorff 拓樸空間 …… 18
0.12　連續性 …… 18
0.13　連通性 …… 20
0.14　緊緻性 …… 22
0.15　局部緊緻性 …… 25
0.16　可分離性 …… 25
0.17　仿緊緻性 …… 25

第一章　流　形　31

1.1 流形之定義……31
1.2 流形之實例……35
1.3 可微映射……52
1.4 子流形……59
1.5 可微曲線……64
1.6 切向量……68
1.7 座標向量場……72
1.8 映射之微分映射……80

第二章 張量代數 91

2.1 向量空間……91
2.2 線性無關之概念……94
2.3 取和的慣用法……99
2.4 子空間……102
2.5 線性映射……104
2.6 線性映射之空間……107
2.7 對偶空間……112
2.8 多重線性映射……114
2.9 自然配對……115
2.10 張量空間……116
2.11 張量代數……117
2.12 新的解釋法……118
2.13 轉換律……123
2.14 不變量……126
2.15 對稱張量……128
2.16 對稱代數……130
2.17 反對稱的張量……133
2.18 外代數……136

2.19 行列式……142
2.20 雙線性形……146
2.21 二次形……148
2.22 Hodge之對偶性……156
2.23 斜組形……162

第三章 流形上的張量分析 181

3.1 向量場……181
3.2 張量場……184
3.3 黎曼測距……187
3.4 積分曲線……187
3.5 流 線……193
3.6 李導數……199
3.7 李乘積……205
3.8 李乘積的幾何解釋……208
3.9 映射之作用……212
3.10 臨界點的理論……218
3.11 一階偏微分方程式……228
3.12 Frobenius 定理……237

第三章 附 錄 241

3.A 張量束……241
3.B 可平行化的流形……244
3.C 可其號性……255

第四章 積分理論 257

4.1 導 論……257
4.2 微分形式……258

4.3 外導數……259
4.4 內消積……264
4.5 Poincaré 引理之逆……268
4.6 方體鏈……275
4.7 歐氏空間上的積分……287
4.8 微分形之積分……290
4.9 Stokes 定理……298
4.10 微分系統……304

第五章 黎曼與半黎曼流形 317

5.1 導 論……317
5.2 黎曼測距與半黎曼測距……319
5.3 長度、角度、距離與能量……320
5.4 歐氏空間……325
5.5 變分及長方形……327
5.6 平直空間……330
5.7 仿射連繫……335
5.8 平行位移……341
5.9 張量場之順變微分……347
5.10 曲率張量及扭率張量……350
5.11 一個半黎曼結構的連繫……361
5.12 測地線……369
5.13 測地線的極小化性質……374
5.14 截面曲率……378

第六章 物理上的應用 387

6.1 導 論……387
6.2 漢米頓流形……388

6.3 餘切束上的標準漢米頓結構……393
6.4 半黎曼流形上的測地噴場……398
6.5 動相空間……400
6.6 狀況空間……407
6.7 切觸座標……408
6.8 切觸流形……410

參考文獻 415

第零章

集合論與拓樸學

前半段：集合論

我們無法以這麼短的篇幅來傳達集合論的重要性。因此這兒所著重的在於給出邏輯的完整性並固定我們未來所要使用的符號。我們給出各樣的定義並歸結出各項有關集合論的性質與結果。

0.1 集 合

集合論裏所關心的是一些抽象的客體（ object ）以及由這些客體所組成的各種集合之間的各種關係。我們並不再花功夫從哲學的觀點定義什麼是一個集合，我們這兒就直接接受一般集合的概念而將其當做基礎，用以建立我們的理論。**集合**（ set ）在英文中有下列的同義字：class（種類，年級，階級），collection（收集，堆積），conglomeration（集塊，密集固結），bunch（串，束，捆），aggregate（集合，總計）。因此所謂集合就是把隨便一些抽象的客體放在一起加以考慮成一個對象的意思。在上面幾次提到的**客體**（ object ）的概念我們在這兒也直接接受爲最初步的觀念而不另加解釋。其同義字有 element（元素），point（點）等等。最後我們也把存在於集合與元素之間的關係，例如某個元素落在某個集合裏的概念算爲最初步的觀念而不另加解釋。這時以符號$\in$來表達一個元素落在某集合之中。如果反過來要說某個元素不落在某集合裏，則記爲$\notin$。

就像所有近代的數學一樣，當我們把這些最初步的術語給定之後，我們就可以提出一套運用這些最初步概念的**公設**（ axioms ）系統，然後把集合論發展成一連貫的定義與定理系統。有興趣的讀者不妨參考 J.Kelly 的「一般拓樸學」一書的附錄。我們這兒並不是專門要介紹集合論。因此並不需要用這樣嚴格的方法來講，我們所選用的是一種比較直觀的講法，因

爲這是最自然也最常習用的。

有時我們可能必須考慮某個集合其中所含的元素本身是個集合。因此有可能我們會同時提到 $x \in A$ 以及 $A \in \tau$。這時右邊的 A 與 τ 被解釋成集合，左邊的 x 與 A 被解釋成元素，而說 x 屬於 A，又說 A 屬於 τ。因此同一個 A 或被看成元素，或被看成集合主要隨文義而定。事實上在形式的集合論裏，元素與集合的概念是不需加以區別的。

通常要給出一個集合最方便的方法就是把這集合中所有的元素放在兩個大括號之間，或者在這兩個大括號之間給出此集合之典型元素，並說明此典型元素所需滿足的條件。例如由最小的三個奇自然數所組成的集合可以簡單的寫成 $\{1, 3, 5\}$。另外如果以 Z 來代表所有整數的集合，則所有奇數所構成的集合可以寫成：

$$\{x \mid \text{存在 } n \in Z \text{ 滿足 } x = 2n + 1\}$$

或者寫成：

$$\{x \mid x = 2n + 1,\ \ n \in Z\}, \text{或}\ \ \{2n + 1 \mid n \in Z\}.$$

如果集合 A 中所有的元素也都落在集合 B 之中，則說 A 這集合是集合 B 的子集合，而使用符號

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

來表示。注意上面用到的兩個符號 $\in$ 及 $\subset$ 都具有「屬於」的意思，然而前者表示元素而後者表示子集合，其意義不同，應該仔細從上下文加以辨別。對於一個單只包含一個元素的集合 $\{x\}$ 來講，$\{x\} \subset \{x\}$ 是有意義的。這時我們常省略大括號而把集合 $\{x\}$ 寫成 x，因此 $x \subset x$ 是有意義的。反之如果我們寫 $x \in x$ 就不具意義了。但是 $x \in \{x\}$ 卻又具有意義。因此有時爲了方便而省略符號時，我們必需特別小心辨別文義，免得混亂掉了。

兩個集合 A 與 B 相等當且唯當 $A \subset B$ 與 $B \subset A$ 同時成立。這時我們記爲 $A = B$。我們以後常以 iff 來簡寫「**當且唯當**」（if and only if）這句話，因此就說：

$$A = B \text{ iff } A \subset B \text{以及} B \subset A.$$

0.2 集合之運算

任意給定兩個集合 A 及 B，則其交集 (intersection) $A \cap B$ 就定義爲所有同時屬於 A 也屬於 B 的元素。至於其聯集 (union) $A \cup B$ 則定義爲 A 與 B 中所有元素的全體。因此求兩個集合之交集與聯集的運算可以寫成：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 以及 } x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}.$$

由於有時所考慮的集合可能超過兩個，因此我們更好來給出交集與聯集的一般化定義。假設 J 代表**指標的集合** (index set)，現在考慮具有如下形狀之集合全體 $\{ A_\alpha \mid \alpha \in J \}$，而定義這些集合的交集與聯集爲：

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$$
$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

如果指標集合 J 是個有限個元素的集合，例如由頭 n 個正整數所構成，則上面的交集與聯集常可改寫成如下形式：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

爲了使得當兩個集合沒有任何共同元素時其交集仍然是個集合，我們必須引入空集合的概念。所謂空集合就是其中不含任何元素的集合，通常以符號 $\varnothing$ 表示之。這種空集合非常有用，我們更可以把空集合看成就是任何集合的子集合。

兩個集合 A 與 B 的差集合 $A - B$ 定義爲所有落在 A 中但卻不屬於 B 中的元素。注意在這定義中 B 不見得是 A 的子集合。但是在特別的情形當 B 爲 A 之子集合時，我們就說 $A - B$ 爲 B 在 A 中的**餘集** (complement)。如

果A代表某個固定的集合，而我們是在處理這個固定集合中的子集合的問題，則我們常略去A不提，而直接以B'來代表B在A中的餘集。

習題 0.2.1 兩個集合A與B的對稱差(symmetric difference)定義爲：$A \triangle B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$。因此我們有$A \triangle B = B \triangle A$。試證明上面後一個等式。另外又證明如下的分配律成立：

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

可是對於每個集合A，都有$A \triangle A = \varnothing$。

0.3 卡氏乘積 (Cartesian product)

一個有序對(ordered pair)由一組有秩序的元素所組成，前面的元素稱爲此有序對的第一個元素或第一個座標，而後面的元素稱爲第二個元素或第二座標。如果一個有序對的第一個元素爲$a \in A$，而其第二個元素爲$b \in B$，則我們將此有序對記爲(a, b)。如果不考慮這兩個元素的前後秩序，則說他們構成一個無序對，而以通常的$\{a, b\}$表示之。這樣的無序對理應考慮兩個不相同的元素，因此$a \neq b$，而且$\{a, b\}$這組元素就是$\{b, a\}$這組元素。可是如果我們考慮有序對的話，前後兩個位置具有不同的意義，因此我們不妨考慮有序對(a, a)，就是其第一及第二座標同爲a的有序對。同時按定義$(a, b) = (c, d)$當且唯當$a = c$以及$b = d$。因此若$a \neq b$，則自然$(a, b) \neq (b, a)$。

設A，B爲兩個集合，我們可以考慮所有如下形狀之有序對的集合：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

這集合稱爲A與B之卡氏乘積。

習題 0.3.1 $A \times B = B \times A$嗎？

我們可以重複進行卡氏乘積的運算。這時我們可以把$A \times (B \times C)$看

如 $(A\times B)\times C$，而認爲是如下的三重卡氏乘積：

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)\mid a\in A,b\in B,c\in C\}.$$

因此我們把 $((a,b),c)$，$(a,(b,c))$ 及 (a,b,c) 看爲同一個元素而不加以區別。更一般也可以考慮 n 個集合的卡氏乘積：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

如果這些集合都是同一個集合 A，則我們可以用 A^n 來代表 n 個 A 的卡氏乘積。

卡氏乘積 $A\times B$ 中隨便一個子集合 S 都可以看成給定 A 與 B 間的一個關係（relation）。若 $(a,b)\in S$，則說 a 與 b 相關，而記爲 aSb。例如若取 $A=B=R$ 爲所有實數的集合，我們可以考慮「小於」的關係 $<$，這是由所有滿足第一個元素小於第二個元素的有序實數對 (x,y) 所組成的 $R\times R$ 中的子集合。另外像下節所要定義的函數，其實也是一種特別形式的關係。

在一般分析學中，或者在張量分析中由 n 個實數集合 R 所做出來的 n 重卡氏乘積 R^n 特別重要。當 $n=2$ 或 3 時，卡氏乘積 R^2 與 R^3 並不就等於通常的二維歐氏平面與三維歐氏空間。其間的差別在於後者還特別於其上考慮某種特定的測距，因此就具有一些額外的結構。此外在歐氏空間裏所有點或所有直線皆一視同仁，沒有什麼點或什麼直線是比別的點別的直線較爲特出的。但是在 R^3 中就有座標系統，因此其原點 $(0,0,0)$ 以及三條座標軸皆爲 R^3 中特出的點或直線。

0.4 函 數

一個從 A 到 B 的函數 f 就是一種能對每個 A 中的元素適當指定一個 B 中元素 $b=fa$ 的法則，通常將此函數記爲 $f:A\to B$。在上面這定義中使用了一個新的最初步的觀念「法則」。但是其實我們是可以不必使用這種新的觀念而仍能定義函數的。其做法如下：

當我們有了一個函數 $f:A\to B$，就可以立即考慮這個函數的圖形（graph），就是一個落在 $A\times B$ 中的子集合：

$$\{(a, fa) \mid a \in A\}$$

$A \times B$ 中的一個子集合要能成爲某個函數的圖形的話就必需滿足某些特徵條件，我們能使用純粹點集論的術語來表達這些特徵條件。有了函數就能得出其函數圖形，相反的，有了一個滿足適當特徵條件的函數圖形，我們就立即可以得出其相應的函數來。因此函數與函數圖形其實是同一個東西。事實上在慣常的用法裏兩者是彼此通用的。我們這兒只需注意到兩者在觀念上所具有的輕微差別就是了。

與函數同義的字有好多，就像 transformation（轉換），map（映射），mapping（映射），或 operator(運算，算子）等等。有些人喜歡採用如下的慣用法：當一個映射或運算之值爲數值，像實數或複數時，才說這種映射爲函數。

要表示函數在某點的值，通常是記爲 $f(a)$，但是我們在本書中都要把括號去掉，而直接記爲 fa。除非 a 本身代表一個複合數，那麼就不可省略括號。例如若 $a = x + y$ 則必須寫成 $f(x + y)$ 而不可寫 $fx + y$，因爲後者或許無意義，或許意表 fx 與 y 之和，因此跟 $f(x + y)$ 全然不同。

A 稱爲函數 $f: A \to B$ 的**定義域**(domain)。至於 f 之**像域**(range，image，target）就是子集合：

$$fA = \{fa \mid a \in A\} \subset B$$

集合 B 稱爲函數 f 的值域，但是有時候也直接稱 B 爲 f 之像域。在 B 中的一個元素 b 若可寫爲 $b = fa$，則說 b 爲 f 的一個值，也可以說 b 是 a 在 f 之下的**影像**(image)或映像。

如果 $fA = B$，則說 f 射到整個 B 之上，或者說 f 是個**蓋射**(onto)。如果對於每個 fA 中的元素 b 都只有唯一的元素 a 滿足 $b = fa$，則說 f 是個嵌射，或一對一的映射。在這時我們可以定義 f 之逆映射 $f^{-1}: fA \to A$ 爲 $f^{-1}fa = a$。

考慮 $f: A \to B$，而任取 A 中之子集合 C。我們可以把 f 限制到 C 上而得出一個其定義域爲 C 的函數 $f|_C : C \to B$。由於 f 與 $f|_C$ 其實都是同一個函數，只不過變動其定義域的範圍而已，因此我們通常並不需特別對

兩者加以區分。

若C爲A之子集合，我們立即可以定義**包含映射**(inclusion map) $i_C : C \to A$，就把C中之任意元素指定到本身。當C就取爲A時 i_C 稱爲A上的**恒等映射**(identity map)。

如果$f : A \to B$，$g : C \to D$，則g與f的**合成函數**(composition) $g \circ f$ 定義爲 $(g \circ f)a = g(fa)$，其中$g \circ f$的定義域是$E = \{ a \in A \mid fa \in C \}$。因此如果$C \cap (fA) = \varnothing$，則$g \circ f$就稱爲**空函數**(empty function) $\varnothing : \varnothing \to D$。如果$f$與$g$分別藉一些公式表達出來，則$g \circ f$就可以直接藉著將$f$的公式代入$g$的公式而整理出來。有關函數的合成，結合律是滿足的，因此對於任意函數f, g, h都有

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

習題 0.4.1 令$f : A \to B$。假設有一個函數$g : B \to A$滿足$f \circ g = i_B$，試證f爲蓋射，而g爲嵌射，又$h = f|_{gB}$爲**同構映射**(isomorphism)，此即同時爲嵌射及蓋射。又證明$g = i_{gB} \circ h^{-1}$。另外舉例說明這時f並不見得爲嵌射。

習題 0.4.2 試證明$f : A \to B$爲同構映射當且唯當存在有$g : B \to A$滿足$g \circ f = i_A$以及$f \circ g = i_B$。這時就有$g = f^{-1}$。

實例(a) 設N代表從 1 到n這頭n個自然數的集合。我們可以將卡氏乘積R^n考慮成所有函數$f : N \to R$之集合。因爲給定這樣的一個函數我們就可指定R^n中之一點：

$$(f1, f2, \ldots, fn)$$

反過來任取R^n中的一點$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$我們可以指定一個函數$f_i = a_i$。

實例(b) 函數$u^i : R^n \to R : (x^1, \cdots\cdots, x^n) \to x^i$稱爲第$i$個座標函數，

或稱為到第 i 軸的投射（projection）。因此如果將 R^n 考慮成函數 $f:N\to R$ 的集合，則可直接定義

$$u^i f = fi.$$

實例(c) 使用實例(a)我們可以定義無窮多個集合的卡氏乘積。取許多的集合 $\{A_\alpha \mid \alpha\in J\}$，則這些集合之卡氏乘積可定義為：

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha = \{f \mid f: J\to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \text{ 其中對所有 } \alpha \text{ 皆有 } f\alpha\in A_\alpha\}$$

這時根據實例(b)，投射或座標函數 $u_\alpha:\prod_{\beta\in J} A_\beta\to A_\alpha$ 可以定義成：

$$u_\alpha f = f\alpha$$

當然所有這些投射皆為蓋射。

0.5 函數與集合之運算

給定一個集合 A，考慮其中所有的子集合所構成的集合：

$$\mathscr{P}A = \{C \mid C\subset A\}$$

則說 $\mathscr{P}A$ 是 A 的**冪集合**（power set）。

如果給定函數 $f:A\to B$，我們就可以定義 f 的**冪映射**（power map）如下：

$$f:\mathscr{P}A\to\mathscr{P}B\,0:C\to fC=\{fc \mid c\in C\}$$

我們以後不僅以同符號 f 表示 f 的冪映射，我們也以 fA 表示這冪映射的像域。

設 $f:A\to B$，我們可以定義 f 之完全的**逆像映射**（complete inverse image map）為 $f^{-1}:\mathscr{P}B\to\mathscr{P}A$，其中對於任意 $D\subset B$ 定義 $f^{-1}D=\{a \mid fa\in D\}$。如果 f 為同構映射，則這個 f^{-1} 會等於 f 之逆映射 f^{-1} 之冪映射。從下面的幾個習題能看出，一般而言對於集合之運算來講這個逆像映

射之性質會比冪映射之性質來得好。

習題 0.5.1 f 為蓋射的充要條件是其逆像映射 f^{-1} 是個嵌射。

習題 0.5.2 試證下列關係式：

(a) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = (f^{-1}D_1) \cap (f^{-1}D_2)$.
(b) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = (f^{-1}D_1) \cup (f^{-1}D_2)$.
(c) $f(C_1 \cap C_2) \subset (fC_1) \cap (fC_2)$.
(d) $f(C_1 \cup C_2) = (fC_1) \cup (fC_2)$.

習題 0.5.3 試舉例說明 $(fC_1) \cap (fC_2) \neq f(C_1 \cap C_2)$.

習題 0.5.4 設 C 為 A 中之子集合，我們可以定義 C 的**特徵函數**(characteristic function) $\Phi_C : A \to \{0, 1\}$ 如下：

若 $a \in A - C$，則取 $\Phi_C a = 0$，若 $a \in C$，則取 $\Phi_C a = 1$，若以 2^A 來代表所有從 A 到 $\{0, 1\}$ 之函數的集合，試證定義為 $\Phi C = \Phi_C$ 之函數 $\Phi: \mathscr{P}A \to 2^A$ 是個同構映射。由於這緣故我們可以把 $\mathscr{P}A$ 視如 2^A。

習題 0.5.5 如果 A 為有限集合，試證 2^A 也是個有限集合。請計算其元素個數。

習題 0.5.6 任取 $F: A \to 2^A$。定義 2^A 中的元素 f 如下：對於每個 A 中的元素 a 令 $fa \neq (Fa)a$。由於 $(Fa)a$ 只可能有兩個值，因此上面定義是有意義的。試證明這樣取得的 f 一定不落在 F 的像域中，可見 F 一定不可能為蓋射。因此 A 與 2^A 之間不可能有一一對應的關係。直覺上我們知道 2^A 遠比 A 來得大，本習題就精確的說明這事。

如果一個集合是有限的，或者可以跟所有正整數的集合建立一個一一對應的關係，則說這個集合是**可數的**(countable)。按照這定義所有整數的集合是可數的。因為可以將其中的元素依序排列成 $0, 1, -1, 2, -2,$

3，−3，……。另外如果考慮所有正整數的集合跟自己的卡氏乘積，則這集合也是可數的，因爲我們可以取得從這集合到正整數的嵌射如下：

$$(m, n) \to 2^m 3^n$$

能證明所有**有理數**（rational number）的集合爲可數的。另外由可數個可數集合所得到的聯集也是可數的集合。

由習題0.5.6，若Z爲所有整數的集合，則 2^Z 一定是個不可數的集合。考慮實數表爲二進位的形式，然後運用同一技巧可以證明所有實數的集合是不可數的。

0.6 等價關係

若集合P中包含元素m，n，p，……等等。而E爲$P\times P$ 中的一個子集合（一個關係）滿足下列條件：

(a) 反射律：對於所有的m都有mEm。
(b) 對稱律：若mEn則必定nEm。
(c) 遞傳律：若mEn以及nEp則必定mEp。

則說E是一個P上的**等價關係**（equivalence relation）。

給定一個等價關係，我們就能將P整個分成一些彼此不相交的子集合，稱爲E的**等價類**（equivalence class）。而其中包含元素m的等價類可寫爲：

$$[m] = \{n \mid nEm\}$$

容易證明對於每個元素m，總有$m\in[m]$；如果$m\in[n]$則必定$n\in[m]$；如果$m\in[n]$以及$n\in[p]$則必定$m\in[p]$。由這些性質立即得出：

$$[m] = [n] \quad \text{iff } mEn.$$

反過來我們如果已經把整個P分隔成一些彼此互不相交的子集合的聯集，則可定義P中的兩個元素m與n彼此具有關係mEn當且唯當這兩元

素落在同一個子集合裏。能證明所得的關係E是個等價關係。而且其等價類就是原先所給定的那些子集合。

所有E的等價類的集合稱爲商集(quotient)，而將其簡記爲P/E，因此有：

$$P/E = \{[m] \mid m \in P\}$$

第零章前半段習題提示

0.2.1

$$\begin{aligned}(A\triangle B)\cap C &= (A\cup B - A\cap B)\cap C\\ &= (A\cup B)\cap C - (A\cap B)\cap C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\cap C)\triangle(B\cap C) &= ((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &\quad -((A\cap C)\cap(B\cap C))\\ &= (A\cup B)\cap C - (A\cap B)\cap C\end{aligned}$$

所以兩者相等。

0.4.1 對於任意$b\in B$，有$fgb = b$，所以f就把$gb\in A$映射到b，因此f爲蓋射。同樣，若b，b'滿足$gb = gb'$，則有$fgb = fgb'$，所以$b = b'$，因此g爲嵌射。

考慮f爲取實數之絕對値，而g爲非負實數到實數集合的包含映射就可。

0.5.1 若f爲蓋射，則對任意元素$b\in B$存在非空集合$D\subset A$使得$D = f^{-1}b$，如果另有$b'\in B$正好$f^{-1}b = D = f^{-1}b'$，則有

$$b = f(f^{-1}b) = fD = f(f^{-1}b') = b'$$

而得證f^{-1}爲嵌射。

反過來假設f^{-1}是個嵌射，而f非爲蓋射。則存在B中一點b非爲f的影像，因此$f^{-1}\{b\} = \varnothing$，可是$B$中的空集合$\varnothing$也使得$f^{-1}\varnothing = \varnothing$，這表示$f^{-1}\{b\} = f^{-1}\varnothing$，所以必須$\{b\} = \varnothing$，矛盾。這證明了$f$必定是個蓋射。

0.5.2 (a)

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(D_1\cap D_2) &\Leftrightarrow fx\in D_1\cap D_2\\ &\Leftrightarrow fx\in D_1 \ \&\ fx\in D_2\\ &\Leftrightarrow x\in f^{-1}D_1 \ \&\ x\in f^{-1}D_2\\ &\Leftrightarrow x\in f^{-1}D_1\cap f^{-1}D_2\end{aligned}$$

(c) 對任意$x\in f(C_1\cap C_2)$，存在$c\in C_1\cap C_2$使得$fc = x$。這個c在C_1中也在C_2中，因此x落在fC_1中也落在fC_2中，而證得這個任意

的 x 必定落在 $fC_1 \cap fC_2$ 中。

0.5.3 考慮 f 爲取實數的絕對值，C_1 爲正數集合，C_2 爲負數集合，則 $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ 而有 $f(C_1 \cap C_2) = \varnothing$。但是 $fC_1 = fC_2$，他們的交集等於所有的正數。

0.5.4 任取 $f \in 2^A$，則 $C = \{a \in A \mid fa = 1\}$ 能滿足 $f = \Phi_C = \Phi C$，因此 Φ 是個蓋射。

0.5.5 若 A 中元素個數爲 n，則 2^A 中元素個數爲 2^n。

後半段：拓樸學

0.7 拓 樸

我們無法在這麼短的篇幅中表達拓樸空間的全部重要意義。我們這兒給出這些定義與定理只是爲了使本書在邏輯上具有完整性。初學張量分析的人幾乎可以省略掉所有有關拓樸方面的考慮。因爲在拓樸的假設中有些是非常自然的，像連續性或者像Hausdorff 性質；而另些則是高度技巧性的，像可分離性或者仿緊緻性等等，因此都不妨略而不談。可是如果我們要對張量分析中所遭遇到的許多存在性問題做進一步的研究，那麼我們就必須對於一些較難運用的拓樸性質加以某些適當的假設，例如考慮緊緻性或考慮仿緊緻性等等。明顯的實例就像定理3.4.3有關向量場之完全積分曲線之存在性，或者定理0.14.3有關連續函數極大極小的存在性都需要要求緊緻性的假設。至於第五章第二節在證明黎曼測距之存在性時就必須用到仿緊緻性的假設。最後我們也一直希望有關各種代數拓樸不變量的廣泛理論能夠更多的被使用在應用數學中，因此我們特別放入一些實例，像第3.10節的摩斯理論以及第4.5節的de Rham 定理來實際示範這些代數拓樸不變量（像Betti 數）之廣泛可用性。

一個集合 X 之上的拓樸（topology）或拓樸結構就是 $\mathscr{P}X$ 中的一個子集合 T 滿足下列三項條件：

(a) 假若 $G_1, G_2 \in T$，則必定 $G_1 \cap G_2 \in T$。

(b) 若 $\{G_\alpha \mid \alpha \in J\} \subset T$，則 $\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \in T$ 。
(c) $\varnothing \in T$ 以及 $X \in T$ 。

X 與 T 合在一起 (X, T) 就構成一個拓樸空間。這時落在 T 中的那些元素就稱爲這個拓樸空間裏的開集合（open set）。如果固定考慮某個拓樸結構 T，則常將其省略而直接說 X 就是一個拓樸空間。要注意的是同一個集合可以加給許多不同的拓樸結構。特別有一個最細的拓樸 $T = \mathscr{P}X$，稱爲**離散拓樸**（discrete topology）。另外有一個最粗的拓樸 $T = \{\varnothing, X\}$。這兩種極端的拓樸結構實際上並沒有什麼用處。

習題 0.7.1 設 X 具有兩個或三個元素。試問 X 上能有多少個不同的拓樸?

(X, T) 中的閉集合就是 T 中元素在 X 裏的餘集。使用閉集合我們照樣可以給出拓樸結構的定義，此即：

定理 0.7.1 (a) 有限個閉集合的聯集仍是個閉集合。
(b) 任意多個閉集合的交集仍爲閉集合。
(c) $\varnothing$ 以及 X 皆爲閉集合。

注意開集合或閉集合並不是互相排斥的性質。一個集合可能單是開集合，也可能單是閉集合，但也可能同時是開集合又是閉集合，另外也可能既不是開集合也不是閉集合。

設 X 爲拓樸空間而 A 爲子集合。考慮所有包含於 A 中之開集合的聯集，則稱之爲 A 之內集，以 A° 記之。因此：

$$A^\circ = \bigcup \{B \mid B \subset A \text{ 以及 } B \in T\}.$$

由假設條件(b) A° 也是一個開集合，因此是 A 中最大的開子集。對偶於內集的觀念就是一個集合的**閉包**（closure）。因此 $A \subset X$ 的閉包 $\overline{A}$ 就定義爲所有包含 A 之閉集合的交集。此即：

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subset B \text{ 以及 } X - B \in T\}$$

根據條件(b)知道$\overline{A}$是個閉集合，因此$\overline{A}$是包含A的最小的閉集合。下面的定理指出只要我們完全清楚如何從一個集合取得其內集或閉包，那麼我們就能決定這個拓樸結構。

定理 0.7.2 一個集合爲開集的充要條件爲此集合等於其內集。同樣一個集合爲閉集的充要條件爲此集合等於其閉包。

由一個集合求取其閉包的運算可以認爲是一個從$\mathscr{P}X$到$\mathscr{P}X$的函數。Kuratowski 曾提出有關這種閉包運算所滿足的條件系統。當這些條件被當做公設系統來用時，定理0.7.2就被當做一個閉集合的定義。這時原先閉集合的公設（就是定理0.7.1的(a)(b)(c)三條性質）就被當做定理來看待。但是在較爲慣常（我們上面所採用）的講法裏 Kuratowski 的公設系統就是一些定理，他們可寫成：

定理 0.7.3 對於拓樸空間X中任意的集合A與B都有：

(a) $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cup\overline{B}\ \overline{A}$
(b) $A\subset\overline{A}$.
(c) $(\overline{\overline{A}})=\overline{A}$
(d) $\overline{\phi}=\phi$

習題 0.7.2 試證明定理0.7.3。敍述並證明其關於求內集運算：$\mathscr{P}X\to\mathscr{P}X$ 的對偶定理。

一個集合$A\subset X$的**邊界**（boundary）定義爲$\partial A=\overline{A}-A^{\circ}$，就是屬於閉包但卻不落在內集之中的點集。$\partial A$中的元素叫做$A$的邊界點。我們同樣對於求邊界運算 ∂: $\mathscr{P}X\to\mathscr{P}X$ 可以給出一套 Kuratowski 式的公設系統而用之建立起拓樸結構來。例如假設已經全然知道求邊界的運算，則開集合可以定義成那種能夠滿足條件$G\cap\partial G=\varnothing$的集合$G$。

X中一個元素x的**鄰域**（neighborhood）的定義就是任何集合$A\subset X$滿足$x\in A^{\circ}$。因此特別任何包含x的開集合皆爲x的鄰域。在x點的一

組基本鄰域（basis of neighborhoods）就是一組 x 的鄰域使得當我們任取 x 的一個鄰域來看時，這鄰域一定會包含這組基本鄰域中的某一個。因此特別所有包含 x 的開集合全體構成一組 x 的基本鄰域。但是一般而言對於 x 存在許多組不同的基本鄰域。X 的一組基本鄰域就是對於 X 中的每一點 x 都能指定一組 x 的基本鄰域。

當我們指定了 X 的一組基本鄰域之後，我們隨即可以給出 X 的拓樸結構來。事實上這正是通常在 X 中引入拓樸結構的方法。其定義分成兩步：(1)任何一個集合只要其中能包含 x 的基本鄰域中的某個，則就說這個集合為一個包含 x 的鄰域。(2)當一個集合是其中任意點的鄰域之時，我們就說這集合是個開集合。

有趣的是所有閉集合，閉包以及邊界點等等也都可以直接使用基本鄰域來定義。因此一個集合 G 為閉集合的充要條件為「當一點 x 的基本鄰域中的每一個集合都與 G 相交時，必定 $x \in G$」。至於集合 A 的閉包則由所有其基本鄰域中的每一個集合皆會與 A 相交的那種點所組成。因此當然 $A \subset \overline{A}$。最後集合 A 的邊界是由所有其基本鄰域中的每一個集合皆能同時與 A 以及 $X-A$ 相交的那種點所組成。

0.8 賦矩空間

有一種非常方便可用來給出基本鄰域（因此就給出拓樸結構）的方法就是使用**測距**（metric）或即**距離函數**（distance function）。這是一個滿足下列性質的函數 $d : X \times X \to R$。

(a) 正值：對於所有 X 中的元素 x，y 皆有 $d(x, y) \geq 0$，

(b) 非退化：若 $d(x, y) = 0$ 則 $x = y$，

(c) 對稱：對於所有 $x, y \in X$ 皆有 $d(x, y) = d(y, x)$，

(d) 三角形不等式：對於所有 $x, y, z \in X$ 都有

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

上面距離函數之值也可以容許取無窮大為其值。當一個集合 X 之上有了一個測距 d，則說 (X, d) 是一個賦距空間。如果固定 d 來考慮就可直接設

X 是個賦距空間。在這空間中可以定義以 x 爲中心以 $r>0$ 爲半徑的開球（open ball）爲：

$$B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$$

能夠容易證明所有這種開球的集合可以用來當做 X 的一組基本鄰域，因此就給出 X 上的一個拓樸結構來。這個拓樸就稱爲測距 d 的拓樸。X 上的兩個測距如果能夠給出相同的拓樸，則說這兩個測距彼此等價。

兩個測距 $d, d_1 : X \times X \to R$ 彼此强等價（strongly equivalent）的定義是：存在正常數 c, c_1，使得對於所有的 $x, y \in X$ 都有：

$$d(x, y) \le c_1 d_1(x, y) \text{ 以及 } d_1(x, y) \le c d(x, y)$$

強等價的測距必定互相等價，可是反過來不見得成立。事實上一個測距 d 總是跟由 d 所得出的另一測距 $d_1 = d/(1+d)$ 互相等價。可是 d 能夠與 d_1 強等價的充要條件是 d 爲有界的（bounded），意即存在常數 k 使得對於所有的 $x, y \in X$ 都有 $d(x, y) \le k$。由 d_1 的取法顯然這測距總是有界的，因此當 d 本身不是有界時 d_1 與 d 當然不可能強等價了。

0.9 子空間

設 X 中有拓樸結構 T，而 A 爲一個子集合。在 A 中只要取 $T_A \subset \mathscr{P}A$ 如下：

$$T_A = \{G \cap A \mid G \in T\}.$$

容易證明 T_A 就是 A 上的一個拓樸結構，這拓樸稱爲由 T 所引進的拓樸或稱爲 T 在 A 上的相對拓樸。當我們使用這個相對拓樸而使 A 成爲一個拓樸空間時，A 就稱爲 X 的子空間。能證明這時 A 中的閉集合正好就等於 X 中閉集合與 A 的交集。

0.10 乘積拓樸

設 X 與 Y 爲拓樸空間，在其卡氏乘積 $X \times Y$ 上我們指定 (x, y) 的一組基本鄰域爲所有具有形狀 $G \times H$ 的集合，其中 G 屬於 x 的一組基本鄰域

中而H屬於y的一組基本鄰域之中。能證明這方法確實能構造出來$X \times Y$上的一個拓樸結構，就稱為乘積拓樸。而拓樸空間$X \times Y$就叫做原來拓樸空間X與Y的拓樸乘積。

現在假設X與Y為賦距空間(metric space)，其中的測距分別為d_X與d_Y，則對於任意$p \geq 1$我們能使用下式：

$$d_p((x, y), (x_1, y_1)) = [d_X(x, x_1)^p + d_Y(y, y_1)^p]^{1/p}$$

來定義出$X \times Y$上的一個測距d_p。當p趨近於無窮大時的極限情形所得的測距為d_∞：

$$d_\infty((x, y), (x_1, y_1)) = \max[d_X(x, x_1), d_Y(y, y_1)].$$

所有這些測距彼此都不相同，可是他們全部彼此強等價，因此都給出同樣的拓樸結構，就是X與Y的乘積拓樸。事實上對於測距d_∞的開球其實只不過是對於d_X與d_Y具有同一半徑之開球的卡氏乘積。

在實數集合R上的標準拓樸是由兩實數之差的絕對值這距離函數來定義：$(x, y) \to |x - y|$。至於R^n上的標準拓樸則由n個具有標準拓樸之R取其拓樸乘積而得。因此這個拓樸可視為由任何下列這些測距所得來：

$$d_p(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |u^i x - u^i y|^p\right]^{1/p}$$

$$d_\infty(x, y) = \max[|u^i x - u^i y|, i = 1, 2, \ldots, n].$$

其中，$p \geq 1$，$x, y \in R^n$。

在所有這些測距中d_2就是通常R^n上的歐氏測距。可是所有這些測距其實全部都互相強等價。以後除非特別說明，不然一提到R^n的拓樸就是指這種標準拓樸。

習題 0.10.1 (a) 固定x與y，試證明對於$p \geq 1$而言$d_p(x, y)$是一個非遞增的函數(註：只需證明其導數≤ 0就可)。

(b) 證明對於任意$x, y \in R^n$都有：

$$d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \text{ 以及 } d_\infty(x, y) = \lim_{p \to \infty} d_p(x, y).$$

(c) 因此對於所有 $1 \leq p \leq \infty$，這些 d_p 彼此都是強等價。

0.11 Hausdorff拓樸空間

如果對於拓樸空間 X 中任意不同的兩點 x 與 y 一定存在他們個別的鄰域 U，V 滿足 $U \cap V = \varnothing$，則說 X 是個Hausdorff空間。因此在這種空間裏單由一個元素 x 所組成的集合 $\{x\}$ 必定是個閉集合。

由測距所引進來的拓樸必定爲 Hausdorff 拓樸。

習題 0.11.1 試證明兩個 Hausdorff 拓樸空間的乘積仍然是一個 Hausdorff 拓樸空間。

0.12 連續性

設 X 與 Y 爲拓樸空間，$f:X \to Y$ 爲函數。如果對於任意 Y 中的開集合 G 必定 $f^{-1}G$ 也爲 X 中的開集合，則說 f 是個連續的函數。

由於 f^{-1} 對於集合運算或取一個集合之餘集都有很好的性質，因此立即能證明 f 爲連續的充要條件也可定爲「f^{-1} 把所有 Y 中的閉集合都映成 X 中的閉集合」。

上面所給有關連續性的定義當我們考慮抽象的拓樸空間理論時使用起來最爲方便。例如立即能證明：

定理 0.12.1 兩個連續函數之合成函數必定也是連續的。

可是在初等微積分中講到實變函數之連續性時通常是用一些小正數 ϵ，δ 來表達的。首先定義函數在某點 x 的連續性，然後要求一個連續函數必須是在每點 x 皆爲連續。對於一個實值函數 $f:R \to R$，令 $y = fx$，則如果對於 y 的每一個由 ϵ 所給的鄰域，必定存在 $\delta > 0$，使得在 f 之下 x 的由 δ 所給定的鄰域完全落在 y 的 ϵ 鄰域之中，這樣的 f 就說是在 x 點爲連續的函數，顯然這樣的講法完全平行於初等微積分裏通常的講法：「對

於每個 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得就任意 x_1 而言，只要 $|x-x_1|<\delta$ 則必定 $|fx_1-y|<\varepsilon$」。

由這些考慮很顯然我們可以說一個函數 $f:X\to Y$ 在 x 點為連續的條件是：任給 $y=fx$ 之鄰域 V，必定存在 x 的適當鄰域 U 滿足 $U\subset f^{-1}V$（或即 $fU\subset V$）。下面所要給的定理 0.12.2 指出本節最初所給有關連續性的定義就等於後來由實變函數之連續性所抽象化而得來的定義。

定理 0.12.2 函數 $f:X\to Y$ 為連續函數當且唯當這函數 f 在每一點 x 皆為連續。

習題 0.12.1 假設在 X 中考慮離散拓樸（就是最細的拓樸），試證明每一個函數 $f:X\to X$ 皆為連續函數。反過來如果在 X 中所考慮的是那個最粗的其開集合只有 X 與 $\varnothing$ 的拓樸，那麼請證明這時只有常數函數才可能是連續函數。這兒所謂**常數函數**（constant function）意表在 X 的所有點其值皆相同。

我們照樣可以把實變函數論中有關極限（limit）的概念抽象化到拓樸空間來。因此可以給出 $\lim_{x\to x_0}fx=y$ 的定義如下：對於 y 的每一個鄰域 V，存在 x_0 的一個鄰域 U 滿足 $(U-\{x_0\})\subset f^{-1}V$。這時照常能證明 f 在 x_0 為連續的充要條件為：

$$\text{(a) } \lim_{x\to x_0}fx=y \text{ and } \quad \text{(b) } fx_0=y.$$

如果一個函數 $f:X\to Y$ 是同構映射，而且 f 與 f^{-1} 同時為連續函數，則說 f 是個同胚映射（homeomorphism）。可是如果 f 單單是嵌射而不是蓋射，則說 f 是個同胚映入（homeomorphism into）。如果 f 以及 $f^{-1}:(fX)\to X$ 皆為連續（其中 $fX\subset Y$ 是採用由 Y 所自然引進的相對拓樸）。一個同胚映射 f 也可以稱為拓樸等價，因為這時 $f|_{T_X}$ 以及 $f^{-1}|_{T_Y}$ 皆為 T_X 與 T_Y 上的同構映射，因此建立起 X 與 Y 之拓樸 T_X 與 T_Y 之間一一對應的關係。如果 $f:X\to Y$ 為同胚，則說 X 與 Y 是互相同胚的拓樸空間。如果在 X 中所具有的某種性質照樣都在所有與 X 同胚的空間中也成立，則

說這種性質是個拓樸性質。如果有某種法則能夠把拓樸空間指定到什麼東西；現在假設這種所指定的東西具有拓樸性質（換言之，如果兩個空間彼此同胚，則所指定的東西必須相同），那麼這樣的一種法則（或者在這法則下所指定的東西）就叫做一個**拓樸不變量**（topological invariant）。通常所遇到的拓樸不變量常是把拓樸空間指定成某種代數系統中的元素。

習題 0.12.2　試證 $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to R$ 爲同胚映射。

0.13　連通性

一個拓樸空間 X 裏頭如果只有 $\varnothing$ 以及 X 同時爲開集又是閉集，則說 X 是個**連通的**（connected）拓樸空間。同樣這個概念也可以從反面來講：

定理 0.13.1　拓樸空間 X 不是連通的充要條件是：存在非空開集合 G，H 滿足 $G \cap H = \varnothing$ 以及 $G \cup H = X$。

假設 A 是 X 的子集合，如果 A 在相對拓樸之下爲連通的，則說 A 是 X 中連通的子集合。能證明下列：

定理 0.13.2　（連鎖定理）：如果 $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 是 X 中的一族連通的子集合，而且滿足 $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \varnothing$，則必定 $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ 也是連通的。

下面這個定理證明起來比較困難：

定理 0.13.3　如果 A 是連通的而且 $A \subset B$ 以及 $B \subset \overline{A}$，則必定 B 也是連通的。因此特別 $\overline{A}$ 也是連通的。

對於實數的集合情形特別簡單。R 中的**區間**（interval）就是具有如下任何形狀的子集合：

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\},$$
$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

其中當所涉及的只是不等號時，a 與 b 可取爲無窮大 $a=-\infty$，$b=\infty$ 。容易證明 R 中所有的連通子集上可能是這些區間，特別 R 本身是連通的。

習題 0.13.1 連通性是一種拓樸性質。換言之，一個連通集合在同胚映射之下的影像仍然是個連通的集合。

定理 0.13.4 設 $f:X\to Y$ 爲連續映射而 A 爲 X 中連通的子集合，則 fA 也是 Y 中連通的子集合。特別取 $Y=R$ 時，fA 是一個區間。特別考慮一個定義於某區間 A 之上的實值連續函數，則 fA 必定也是個區間。

如果 Y 是隨便一個拓樸空間，$f:[a,b]\to Y$ 爲連續函數，則 $f[a,b]$ 是 Y 中（一維）連通的集合，稱爲 Y 中從 $y_a=f_a$ 到 $y_b=f_b$ 之連續曲線。

現在如果拓樸空間 Y 中任意兩點 y_1 及 y_2 都存在一條從 y_1 到 y_2 的連續曲線，則說 Y 是**弧線連通的**（arcwise connected）。由定理 0.13.2 及定理 0.13.4 容易證明一個弧線連通的空間一定也是連通的。

設 x 爲拓樸空間 X 中的一點，考慮 X 中所有包含 x 之連通子集的聯集，而稱之爲 X 中含有 x 的**連通成分**（connected component）。由定理 0.13.2 可見這個包含 x 的連通成分本身也應該是連通的，是 X 中包含 x 的最大的連通子集。如果 x 與 y 是不同的兩點，則包含 x 的連通成分與包含 y 的連通成分或者恒等或者根本不相交。這樣就把 X 分隔成一些彼此皆互不相交的連通子集之聯集。這些就叫做 X 的各個成分，其中每個成分都具極大連通性（此即一個連通成分不可能被包含在一個比它更大的連通子集之中）。由定理 0.13.3 可看出 X 的這些成分都是閉集合。X 中所有成分的個數是個拓樸不變量。

如果在上段的考慮中我們都把連通性換成爲弧線連通性，則也能得出類似的結果，這時X能被分隔成一些弧線連通的成分（arc component）。一般來講把X分成弧線連通的成分會比分成連通的成分來得細，而一個弧線連通的成分並不見得具有封閉性。我們以下面的實例來說明這些細微的差別。這兒的拓樸空間A是連通的，但卻具有兩個弧線連通的成分，其中只有一個弧線連通成分爲閉集合。

實例 考慮R^2中的子集合

$$A = \overline{\{(x, \sin 1/x) \mid 0 < x \leq 1\}}$$

這集合A是連通的，但卻不是弧線連通的。由於A是集合$B = \{(x, \sin 1/x \mid 0 < x \leq 1\}$的閉包，而且$B$是弧線連通的，因此根據定理0.13.3集合$A$是連通的。可是在邊界$\partial B = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$之上的點卻無法跟$B$中的點藉著一條完全落在$A$中的曲線來相連，因此$A$並不是弧線連通的。$A$的兩個弧線連通的成分是$B$與$\partial B$，其中前者並不是閉集合。

如果我們所考慮的是R^n中的開子集，則連通性與弧線連通性互相一致而沒什麼差別。事實上如果A是R^n中的一個連通開子集，則A中任意兩點都可以使用一條A中的多邊形曲線來相連接。這兒所謂多邊形曲線就是一條由有限個直線段所組成的連續曲線。

習題 0.13.2 (a) 假設A爲R^n中的開子集而$a \in A$，試證明A中所有能用A中的一條多邊形曲線來跟a相連的點集構成A的一個開子集。

(b) 試證若A爲連通的，則A也是多邊形連通的。

0.14 緊緻性

考慮拓樸空間X中的子集合A，$\mathscr{P}X$中的一個子集合：$C = \{C_\alpha \mid \alpha \in J\}$若能滿足條件$A \subset \bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha$，則說$C$構成$A$的一個遮（covering）。

如果C中所有的元素都是開集合，則說C是一個開遮(open covering)。在遮$\{C_\alpha \mid \alpha \in J\}$中如果其中的一部分$\{C_\alpha \mid \alpha \in K\}$，$K \subset J$也是$A$的遮，則說$\{C_\alpha \mid \alpha \in K\}$是個子遮。如果遮$C$中的指標集合$J$爲有限，則說$C$是個有限的遮(finite covering)。

現在如果A的任何開遮都具有一個有限的子遮，則說A是**緊緻的**(compact)。

習題 0.14.1 試證緊緻性爲一種拓樸性質。

爲了示範如何使用並操作這種緊緻性的定義，我們這兒來證明實數R中的一個緊緻的子集合A必定是有界的。考慮由所有其長度爲二，具有如下形狀之開區間：

$$\{(n, n+2) \mid n \in Z\}$$

所組成的R的開遮。由於這也當然是A的開遮，按緊緻性之定義，必定存在一個A的有限子遮。在這有限子遮中，其所擁有的開區間$(n, n+2)$當中必定有某個其$n = n_1$爲最大的整數。另外也必定有一個其$n = n_0$爲最小的整數。因此可得$A \subset [n_0, n_1 + 2]$，所以A爲有界的。在下面我們也將看到這個緊緻的集合A也必定是封閉的(參閱定理0.14.2)。

現在反過來能證明R中任意的封閉有界子集合必定是緊緻的，事實上這只不過是Heine-Borel遮定理的重述而已。這樣的結果也可以推廣到R^n上頭而得出R^n中的緊緻子集合正好就是封閉有界子集合。(一個有界的集合就是可以完全被某個開球所包含的集合，因此有界的觀念跟前面一個集合之邊界的觀念並沒有什麼關連)。

緊緻性也可以藉著閉集合以及**有限相交性質**(finite intersection property)來表達成對偶的講法。首先我們說某一族的集合$\{C_\alpha \mid \alpha \in J\}$具有有限相交性質(簡寫成FIP)如果就$J$中任意的有限子集合$K$而言，都有：$\bigcap_{\alpha \in K} C_\alpha \neq \varnothing$

定理 0.14.1 X中子集合A爲緊緻的充要條件是對於任何一族A中相對

封閉的子集合 $\{C_\alpha \mid \alpha \in J\}$，如果這族子集合具有FIP，則必定 $\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha \neq \varnothing$。這定理其實非常明顯，因爲FIP意表 $\{A - C_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 中沒有任何有限個的子集合能夠遮住 A，而 $\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha \neq \varnothing$ 意表 $\{A - C_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 根本就不能遮住 A。

定理 0.14.2 (a) Hausdorff 拓樸空間中的一個緊緻集合必定是封閉的。
(b) 在一個緊緻空間中的閉集合也會具有緊緻性。

證明 先來證明(b)。當我們把這閉集合的餘集加入此集合之任意開遮時，立即得出整個緊緻空間的一個開遮。因此從其中可以選出一個有限的子遮來。於有需要時去掉剛加入的那個餘集，我們得出一個原遮對此閉子集的有限遮來，而知緊緻性的條件滿足。

現在假設 A 是 Hausdorff 拓樸空間 X 中的緊緻子集合，又假設 $A \neq \overline{A}$，則存在某元素 $x \in \overline{A} - A$。對於任意 A 中的元素 a，存在包含 a（或 x）的開集合 G_a（或 G_a^x）滿足 $G_a \cap G_a^x = \varnothing$，因爲 X 是個 Hausdorff 的空間。這時 $\{G_a \mid a \in A\}$ 是 A 的一個開遮，因此存在 A 中的一個有限的子集合 J，使得 $\{G_a \mid a \in J\}$ 是 A 的有限子遮。這時 $\bigcap_{a\in J} G_a^x$ 是個包含 x 的鄰域，但卻不跟 $\bigcup_{a\in J} G_a \supset A$ 具有任何交點，因此 x 不可能落在 $\overline{A}$ 之中，這與原先出發的假設發生矛盾。□

定理 0.14.3 假設 $f: X \to Y$ 爲連續映射而 A 爲 X 中之緊緻子集合，則必定 fA 也是 Y 中的緊緻集合。特別若取 $Y = R$，則由於 fA 爲封閉有界，因此其中含有最大與最小的數目，換言之，連續函數在緊緻集合 A 上必定存在極大與極小。或即，存在一點 $a_M \in A$ 滿足 $fa \leq fa_M$ 對所有 $a \in A$ 成立，同樣存在一點 $a_m \in A$ 滿足 $fa \geq fa_m$ 對所有 $a \in A$ 成立。

定理 0.14.4 令 $f: X \to Y$ 爲一個連續的同構映射，其中我們假設 X 爲緊緻，又 Y 爲 Hausdorff 空間。則必定 f 爲同胚映射，特別可看出 X 也爲 Hausdorff 空間。

證明　只需證明 f^{-1} 爲連續就可。因此必需證明 f 把任意閉集合映射成閉集合。現在假設 F 在 X 中爲閉集合，則由定理 0.14.2 (b)知道 F 爲緊緻。使用定理 0.14.3 知道 fF 也是緊緻的集合。再由定理 0.14.2 (a) 知道 fF 爲封閉的集合，因爲 Y 按假設是個 Hausdorff 空間。□

0.15 局部緊緻性

在拓樸空間 X 中如果每一點都擁有一個緊緻的鄰域，則說 X 是**局部緊緻的** (locally compact)。由定義一個緊緻集合當然是局部緊緻的。

習題 0.15.1 (a) 一個局部緊緻空間裏的封閉子空間也一定具有局部緊緻性。

(b) 離散的空間是局部緊緻的。

(c) R^n 是局部緊緻的。

0.16 可分離性

拓樸空間 X 如果具有一組可數的基本鄰域，則說是**可分離的** (separable)。

習題 0.16.1 (a) 假設賦距空間 X 中的子集合 A 爲可數的，而且 $\overline{A}=X$。試證以 A 中之點爲其中心，而以有理數爲半徑之開球全體構成一組 X 上的基本鄰域。因此 X 本身成爲可分離的。

(b) 試證 R^n 爲可分離的。

習題 0.16.2 兩個可分離拓樸空間的乘積仍然是可分離的。

0.17 仿緊緻性

在拓樸空間 X 中考慮一族集合 $\{U_\alpha\}$。如果對於 X 中的每一點都存在

一個鄰域只跟這族集合 $\{U_\alpha\}$ 中的有限個相交，則說這族集合具有**局部有限性**(locally finite)。假設 $\{U_\alpha\}$ 與 $\{V_\beta\}$為X上兩族的遮，如果對於每個指標 β 必定存在某個U_α 滿足 $V_\beta \subset U_\alpha$ ，則說 $\{V_\beta\}$ 這個遮是比 $\{U_\alpha\}$ 這遮更**細緻的遮**(refinement)。假設X是個Hausdorff 空間，而且假設X上任何一個開遮都具有一個比它更細緻的又是局部有限的開遮，則說這個拓樸空間X為**仿緊緻的**(paracompact)。

定理 0.17.1 假設X為一個局部緊緻可分離的Hausdorff 拓樸空間，則必定X可表成可數個緊緻子集合 $\{A_i\}$ 之聯集。事實上，我們更可以選取這組緊緻子集合為遞增的子集合，此即對於所有的指標 i 都滿足 $A_i \subset A_{i+1}$ 。

證明 由可分離的條件令 $\{U_i\}$ ， $i=1,2,\cdots\cdots$為X中的一組可數的基本鄰域，其中每個 U_i 皆為開子集。現在想證明這些 U_i 當中那種滿足條件 $\overline{U}_i$ 為緊緻的集合全體仍然構成一組基本鄰域。因為只需證明：任取X中之開子集G，則對於G中的每一點 x 都存在某個包含 x的 U_i 滿足 $\overline{U}_i$ 為緊緻而且$U_i \subset G$ 。由於X為局部緊緻，因此存在 x 的一個緊緻的鄰域V 。這時$V^\circ \cap G$為開集合，因此存在某個$U_i \subset V^\circ \cap G$ ，能夠滿足 $x \in U_i$ 。但是這樣一來$\overline{U}_i \subset \overline{V}^\circ \subset V$,因為根據定理 0.14.2 ，$V$是封閉的。由同一定理立即得到這個$U_i$ 是緊緻的。

現在在原來的基本鄰域組中將所有其$\overline{U}_i$不是緊緻的那些U_i全部去掉，則所剩下的那些就具有其閉包為緊緻集合的性質。我們仍以 $\{U_i\}$ 記之，他們仍構成X的一組可數個基本開鄰域。最後定義一序列的緊緻集合 A_i 為 $A_i=\bigcup_{j=1}^{i} U_j^-$ ，則顯然A_i具有遞增的性質，而且X正好是所有這些 A_i 的聯集。□

引理 假設一個局部緊緻的Hausdorff 拓樸空間X 可寫為可數個緊緻子集合之聯集，則X同樣也是這些緊緻集合之內集的聯集。

證明 由假設 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，其中$A_i$為緊緻。現在每個$A_i$都能被一

些其閉包具有封閉性的開鄰域所遮蓋，由於 A_i 之緊緻性，可以從這開遮中挑選出一個有限的子遮來。對於每個 i 這種子遮中之集合的閉包皆爲有限個，因此全體而言構成一組可數個緊緻集合滿足其內集之聯集已能遮蓋整個 X。□

定理 0.17.2 假設局部緊緻的 Hausdorff 拓樸空間 X 可寫爲可數個緊緻子集合之聯集，則必定 X 爲仿緊緻。

證明 根據上面引理不妨假設 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^0$，其中每個 A_i 皆爲緊緻，而且 $A_i\subset A_{i+1}^0$。

現在任取 X 的一個開遮 $\{W_\alpha\}$。就每個指標 i 而言所有的集合 $(A_{i+2}^0-A_{i-1})\cap W_\alpha$ 構成緊緻集合 $(A_{i+1}-A_i^0)$ 的一組開遮。因此可以從其中選出一個有限的子遮來。將其記爲 $V_{i1},V_{i2},\cdots\cdots,V_{ip_i}$。由於變動 i 時所有 $(A_{i+1}-A_i^0)$ 能整個遮蓋 X，因此按上法構造出來的 V_{ij}，i，$j=1,2,\cdots\cdots$ 也能遮蓋整個 X。再者 $\{V_{ij}\}$ 比原遮 $\{W_\alpha\}$ 來得更細緻。現在任取 $x\in A_k$，則 A_{k+1}^0 是 x 的一個開鄰域，而這開鄰域跟任何 V_{ij} $(i>k+1)$ 都沒有交點。可見 $\{V_{ij}\}$ 是局部有限的。因此已證明 X 具有仿緊緻性。□

實例 已知在 R^n 中的緊緻集合就是有界的閉集合。現在固定 R^n 中的一點 x，以這點爲中心令 A_i 爲以 i 爲半徑的閉球，$i=1,2,3,\cdots\cdots$。這樣我們可以將 R^n 表成爲一組遞增的緊緻集合之序列 A_i 之內集的聯集。

定理 0.17.3 一個局部緊緻可分離的 Hausdorff 拓樸空間必定是仿緊緻的。這定理可由前面兩個定理合在一起就得出。

習題 0.17.1 假設 Hausdorff 拓樸空間 X 能夠表示成爲一組可數個能與 R^n 中之開子集互相同胚的子集合的聯集，則必定 X 爲仿緊緻空間。

習題 0.17.2 考慮所有的有理數 Q，在其上使用由 R 中所引進來的相對

拓樸結構。則Q為仿緊緻，但是卻不為局部緊緻，試證明之。

註：一個連續函數的定義域是拓樸空間。若想推廣 R^n 上可微分函數的觀念到拓樸空間上的函數來，我們就要在這拓樸空間上先行引入一種可微分的結構，以便談論可微分函數的概念。這種具有可微分結構的拓樸空間常叫做可微流形，就是我們在第一章馬上要加以介紹的。

第零章後半段習題提示

0.7.1 設X只含a與b兩元素，則一共有四個子集合。而有四種拓樸結構：

$$T_1 = \{\varnothing, X\}$$
$$T_2 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$$
$$T_3 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$$
T_4 = 離散拓樸。

假設X有三個元素，則一共有14個拓樸結構：

(a) 最粗的與最細的有兩個。

(b) 只包含$\varnothing$，X，以及隨便一個子集合，這一共有6個；

(c) $T = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ 這種的，一共有三個；

(d) $T = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ 這種的，一共有三個。

0.7.2 (a) $\bar{A} \cup \bar{B}$是個包含$A \cup B$的閉集合，因此當然有：

$$(\overline{A \cup B}) \subset \bar{A} \cup \bar{B}$$

反之，對於任意$x \in \bar{A} \cup \bar{B}$則必定$x \in \bar{A}$或$x \in \bar{B}$。但是$\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$，$\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$，可是在任何情形都有$x \in \overline{A \cup B}$，或即$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$。

0.10.1 (a) 當x，y固定時，可以把$d_p(x, y)$看成是p的一個函數而對p加以微分。這時：

$$f(p) = d_p(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |u^i x - u^i y|^p\right]^{1/p}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p}$$

其中令$a_i = |u^i x - u^i y| \geq 0$，皆為常數。取其自然對數得：

$$\ln f(p)=\frac{1}{p}\ln(a_1^p+a_2^p+\cdots\cdots+a_n^p)$$

記得

$$\frac{d}{dp}(a_i^p)=a_i^p(\ln a_i)$$

又

$$\frac{d}{dp}(\ln f(p))=\frac{f'(p)}{f(p)}$$

而得出：

$$\frac{f'(p)}{f(p)}=\frac{1}{p^2}\left(\frac{p(a_1^p\ln a_1+\cdots\cdots+a_n^p\ln a_n)}{a_1^p+\cdots\cdots+a_n^p}-\ln(a_1^p+\cdots+a_n^p)\right)$$

因此又有：

$$f'(p)=-\frac{a_1^p\ln(1+(\frac{a_2}{a_1})^p+\cdots+(\frac{a_n}{a_1})^p)+\cdots+a_n^p\ln((\frac{a_1}{a_n})^p+\cdots+(\frac{a_{n-1}}{a_n})^p+1)}{p^2(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{1-\frac{1}{p}}}$$

$$\leq 0$$

這就看出 $f(p)$ 是一個非遞增的函數，其値愈來愈小。

(b)的後半中若設 $a_1=\max\{a_1,\cdots\cdots,a_n\}$，則可改寫

$$d_p(xy)=a_1(1+(\frac{a_2}{a_1})^p+\cdots+(\frac{a_n}{a_1})^p)^{\frac{1}{p}}$$

若 $a_i<a_1$，則 $(\frac{a_i}{a_1})^p\to 0$，若 $a_i=a_1$，則 $\frac{a_i}{a_1}=1$。因此不管那種情形，於 $p\to\infty$ 時上式的括號都趨近於一個有限數目的零次方，因此其値爲一，而知 $d_p(x,y)\to a_1=d_\infty(x,y)$。

3.1 設 X 爲連通的，則其中只有 X 及 $\varnothing$ 同時又是開集合又是閉集合。假設 $f:X\to Y$ 爲同胚，而 Y 中除了 Y 與 $\varnothing$ 之外還有子集合 B 也具此特性，則 $A=f^{-1}(B)$ 就也具此特性而使得 X 非爲連通的。這就證明了 Y 必須也是連

通的才可。因此連通性是一種拓樸性質。

0.15.1 (a) 設A爲X中的封閉子集合，而B爲X的緊緻子集合，則$B\cap A$也是A中的緊緻子集合。運用這性質(a)立即得證。

(b) 在離散空間裏每一點就是本身的鄰域，而一點的集合是個緊緻的集合。

(d) 在R^n中的每點a可以取半徑爲r的閉球，這是緊緻的鄰域，因此R^n是局部緊緻的。

0.16.1 (b) Q^n是R^n中一個可數的子集合滿足$\overline{Q^n}=R^n$。

第一章

流　　形

1.1　流形之定義

粗略來講一個可微流形(differentiable manifold)就是一個拓樸空間，在其中每一點具有某個可以引入座標系統的鄰域。這種座標系統乃是由一些定義於這種鄰域之上的實座標函數所組成，他們不只決定了此鄰域中每點的位置，也決定了此鄰域之拓樸結構。換言之整個流形就其中每點之附近局部來講都可以認爲是卡氏乘積空間。此外在兩種座標系統相重疊的區域，從一種座標系統換成另種座標系統的變化必需具有平滑性，這使得以後所要定義的可微分曲線，可微分函數或可微分映射等等觀念就不同的座標系統而言彼此都能協調一致。我們從下面起就要詳細的來給出各有關的定義。

對於許多的物理系統而言人們所給的數學模型常是以流形爲其中最基本的構造。然後按照各個物理系統的特別需要而引入適當的額外結構以便眞確的反映該物理系統的全貌。這兒所謂流形的概念可視爲通常卡氏直線，平面，空間以及高等微積分中所研究的各種曲面之推廣。當然在這推廣的過程中，我們就順便也把可微函數，平滑曲線，切向量，還有向量場等等觀念全都推廣起來。可是應注意的是兩點之間的距離這種觀念，或者直線(或即兩點間最短路徑)的觀念並不屬於可微流形的概念之中。他們是由流形上額外的結構所引進來的。一個流形不見得需要具有這些額外結構，而且一個流形上若有這種額外結構則也不見得只有唯一的一個額外結構。

一個流形具有它自己特別的維數。如果這流形是作爲某個物理系統之模型來看待時，其維數意指此系統之自由度的個數。本書都只限於考慮有限維數的流形。

爲了方便我們給出流形的定義，我們先來做些預備的工作。假設X是個拓樸空間，p爲X中之一點，則說在p點的一個圖表(chart)就是一個

函數 $\mu: U \to R^d$，其中U是一個包含p點的開子集，而μ是一個從U到R^d中之某個開子集的同胚映射。這圖表$\mu: U \to R^d$之**維數**（dimension）就等於d。而這圖表之**座標函數**（coordinate functions）就是由μ之值的各個座標所給出的在U上的實值函數。因此若$u^i: R^d \to R$代表R^d上標準的座標函數：$u^i(a^1, \cdots\cdots, a^d) = a^i$，則此圖表的座標函數就給爲：$x^i = u^i \circ \mu: U \to R$。注意這兒所一再出現的上標並不代表冪次，而只表示第幾個座標，因此千萬不可以搞混了。按照上面定義可知對於U中的每一個點q都有：$\mu q = (x^1 q, x^2 q, \cdots\cdots, x^d q)$，因此我們不妨直接就把這圖表寫成$\mu = (x^1, \cdots\cdots, x^d)$。有些人喜歡把$\mu$叫做**座標映射**（coordinate map），而把U叫做座標鄰域，又把U上座標函數的集合稱爲座標或稱爲在p點的一個座標系統。

在本書的用法中符號u^i總是代表R^d上的標準的第i個座標函數。如果特別考慮R^2或R^3，則有可能我們會照常把u^i改寫成x, y, z等等。注意我們是把x, y, z看成函數。

假設V是R^d中的開子集，而$f: V \to R$之各次偏導數皆存在而且連續，則說f是個C^∞函數或說f是個平滑函數。現在考慮映射$\varphi: V \to R^e$，則若對於所有的$i = 1, \cdots\cdots, e$而言，$u^i \circ \varphi: V \to R$皆爲$C^\infty$，那麼我們就說$\varphi$是個$C^\infty$的映射。

任取k爲一個給定的非負整數。如果上面的定義中只要求所有到k次的偏導數皆存在又連續，則說φ是個C^k的映射。另外我們又說φ爲**解析映射**（analytic map）如果所有的成分$u^i \circ \varphi$皆爲實解析的函數。這兒所謂實解析性當然就照通常意表在每點的鄰域此函數可以表成一個以此點爲原點使用卡氏座標的收斂冪級數。一個解析映射必定爲C^∞映射，可是顚倒過來一個C^∞映射並不見得爲解析的。

習題 1.1.1 (a) 定義函數$f: R \to R$如下：

$$fx = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

試證f爲C^∞函數。又證明f在原點的所有導數皆爲零，此即對於所有k

都有 $f^{(k)}(0)=0$。

(b) 假設函數 $g:R\to R$ 在 0 之鄰域是解析的。則存在一個以 0 爲中心的對稱區間，使得對此區間中所有的點 x 我們都有：

$$gx=\sum_{k=0}^{\infty}(g^{(k)}0)x^k/k!$$

可見在(a)中所給的函數 f 在 0 不可能爲解析的。

實例 取 $z=x+iy$ 爲一個複數。定義函數 $u(x,y)$ 爲 $u+iv=e^{-1/z^4}$，$u(0,0)=0$。則 u 並非 C^{∞} 函數，事實上 u 在原點 $(0,0)$ 已經不連續了。可是另方面 u 各次的偏導數在所有點（包括原點）皆存在，因此看出在 C^{∞} 的定義中所要求的連續性並不是多餘的。如果所考慮的是單變函數，那麼這連續性的要求就屬多餘，因爲這時可微分的函數必定是連續的。

拓樸空間 X 上的兩個圖表 $\mu:U\to R^d$ 以及 $\tau:V\to R^e$ 稱爲互相 C^{∞} 相

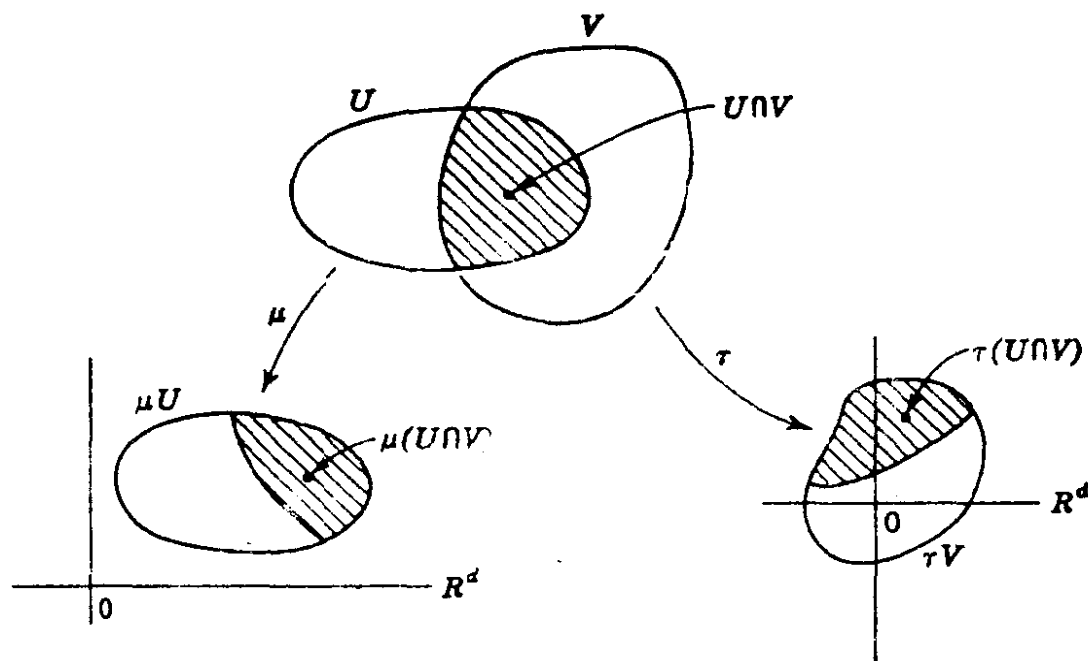


圖 1

關，如果下列條件滿足：

(1) $d=e$

(2) 或者$U\cap V=\varnothing$，或者$\mu\circ\tau^{-1}$以及$\tau\circ\mu^{-1}$均爲C^{∞}映射。

由圖1可見$\mu\circ\tau^{-1}$的定義域爲$\tau(U\cap V)$，這是R^d中的一個開子集。—— 當我們把C^{∞}相關定義中所有C^{∞}的要求都更換爲C^k或者解析，則立即得出兩個圖表彼此C^k相關或者解析相關的定義。另方面由於座標映射必定是連續的，因此任何兩個同維數的圖表必定總是C^0相關。

一個拓樸(C^0)流形就是一個可分離的Hausdorff 拓樸空間在其中的每一點都具有同一個維數d維的圖表。我們就把所有圖表共同的維數稱爲此流形的維數。在流形上我們就有一組圖表：$\{\mu_\alpha:U_\alpha\to R^d\mid\alpha\in I\}$滿足其中的$\{U_\alpha\mid\alpha\in I\}$構成整個空間的一個開遮。這樣一組圖表的集合就稱爲一個圖表集(atlas)。一個C^{∞}的圖表集就是指此集合中任意兩個圖表互相都C^{∞}相關。如果某一個圖表跟一個C^{∞}圖表集之中的每個圖表全都互相C^{∞}相關，則說這個圖表可以被接納來放入這圖表集之中。特別而言，所考慮C^{∞}圖表集裏頭的每一個圖表都是**可接納的**(admissible)。

如果在一個拓樸流形上給了某個C^{∞}圖表集。現在假設所有可被接納進入此圖表集之中的圖表我們全都加以考慮並採用，則說這拓樸流形構成了一個C^{∞}流形。在本書中當我們以後沒有使用任何形容詞而單單提到流形時，我們的意思全都是指C^{∞}流形。在這兒的定義中我們所以採用全部可接納的圖表來做定義的緣故有二。第一，我們希望所有的座標系統都居於同等的地位，而不是單單那些落在某一圖表集之中的座標系統才能被考慮，而使他們佔有特殊的地位。第二，通常一個流形常只簡單的透過某一個圖表集來加以給定。但是如果對於兩個圖表集，其可接納的圖表之集合相同，我們又希望透過這兩個圖表集所定義的流形是同一個流形，而不是不同的兩個流形，因此我們自然就以上法來從一個圖表集加入所有可接納的圖表而得出的極大圖表集來做爲流形的定義。

當我們在上面有關C^{∞}流形的定義中把所有涉及C^{∞}的條件都替換成C^k或者替換成解析性，則立即得出C^k流形或者解析流形的定義。顯然只要把C^{∞}流形定義中的圖表集擴充，使其包含所有與其互相C^k相關的圖

表，則我們就得出一個 C^k 流形。同樣擴充解析流形的圖表集使其包含所有與其 C^∞ 相關的可接納圖表就得出一個 C^∞ 流形。反過來如果從一個 C^1 流形出發，我們可以使用一些做法來去掉其圖表集裏頭的某些 C^1 相關的圖表，而使得所剩下來的圖表集之中的圖表彼此皆互相解析相關。這就得出了一個解析流形（因此也就得出了一個 C^∞ 流形）。這種做法實際做起來並不那麼容易，其實正是一個由Whitney所證明的相當難的定理。可是一個拓樸 C^0 流形不見得一定能夠變成一個 C^1 流形。這事證明起來比 Whitney 的定理更困難得多。

註：在有關座標系統的定義中我們一直要求座標鄰域 U_α 以及其在 R^d 中的影像 $\mu(U_\alpha)$爲開集合。這種要求是比通常的用法較嚴格一些的。在高等微積分裏所習用的曲線的(curvilinear)座標系統，例如像球面座標，就不見得嚴格的要求定義域爲開集合。事實上沿著 z 軸上，儘管已經不滿足一對一之對應，我們仍還使用球面座標。我們所以在定義中放入這些開集合的要求，其用意在於使得所考慮流形之局部結構具有一致性，而使得流形上各種性質的進一步分析大大的簡化了。因此這時所考慮的流形不會出現邊界點，所以當我們論到可微分性時不用爲著單邊或雙邊的可微分性而操心。另方面在實際應用時我們是常需面對一些邊界值的問題，因此我們有可能必須考慮一種具有邊界的流形(manifold with boundary)。這種具有邊界的流形比我們書中所考慮的流形來得一般，因爲其中涉及該流形的邊界流形，其維數是比此流形之維數少掉一的。這時落在邊界流形上之點的座標鄰域可以看成附著於某個內部流形裏的座標鄰域，其間的關係有點像一個方體的表面如何附著於此方體之內部一般。研究邊界值的問題會比研究空間中內點之問題困難得多，照樣研究具有邊界之流形的問題會比單單研究流形的問題來得困難。因爲這緣故，我們在本書中單只限於處理流形本身的問題，而不去考慮其邊界的問題。

0.2 流形之實例

(a) 卡氏空間

有一種最明顯的方法可以在 R^d 上加給一個流形的結構。這時只需選取圖表集爲包含單獨一個圖表 $I:R^d\to R^d$ ，其中 I 代表恒等映射。這個

圖表的座標函數就是標準的卡氏座標 u^i 。當我們以後把 R^d 當成流形時，我們所指的就是這個標準的流形結構。

現在 R^d 上一個可接納的座標映射就是一個具有平滑性的嵌射 $\mu:U\to R^d$，其中 U 爲開子集，而且若 $x^i=u^i\circ\mu$，則其賈氏矩陣（Jacobian）必須是個非奇異的矩陣，$|\partial x^i/\partial u^j|\neq 0$ 。因爲這條件保證了 μ^{-1} 能存在又具有 C^∞ 的性質。

假設 f^i，$i=1,2,\cdots\cdots,d$ 爲一組定義於 R^d 之開子集上的實値 C^∞ 函數。假設在某點 $p\in R^d$ 我們有 $|\partial f^i/\partial u^j|\neq 0$，則由逆函數定理知道存在 p 的一個鄰域 U 以及（$f^1p,\cdots\cdots,f^dp$）的一個鄰域 V 使得映射 $\mu=(f^1,\cdots\cdots,f^d)$ 把 U 射到 V 上，而且 μ 爲同構映射。同時 μ 具有 C^∞ 的逆映射。因此 μ 就是一個可接納的座標映射。這種方法就是得到可接納座標系統的最有效方法。特別我們可以考慮極座標，圓柱座標，球座標等等慣常使用的曲線座標。當他們被適當的限定在他們是嵌射而且其賈氏行列式不爲零的所在，他們就構成了 R^2 或 R^3 中可接納的座標系統。

實例 取 $\mu=(x^2+2y^2,3xy):R^2\to R^2, u=x^2+2y^2, v=3xy.$ 。取其賈氏矩陣爲

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}2x & 4y\\ 3y & 3x\end{pmatrix}$$

因此其行列式值爲 $6(x^2-2y^2)$ 。除了在兩條直線

$$y=x/\sqrt{2}, \text{以及 } y=-x/\sqrt{2}$$

所組成的**奇異點集**（singular points）之外，此行列式值皆不爲零。因此對這兩條直線以外的任何點而言，總存在適當的鄰域使得在其上 μ 爲一個可接納的座標映射。如果想知道這些鄰域到底具有什麼樣子，那麼我們就得較詳細的進一步分析。首先在 μ 之下顯然直線 $y=x/\sqrt{2}$ 被映射成半線 $u\geq 0$，$v=3/2\sqrt{2}\,u)$，同樣直線 $y=-x/\sqrt{2}$ 被映射成半線：$v=-3/2\sqrt{2}\,u)$，$u\geq 0$ 。如果我們考慮直線 $x=c$ 在 μ 之下的影像，立即得出它是一條拋物線：$u=c^2+2v^2/9c^2$ 。在圖 2 中我們把這些資料都畫

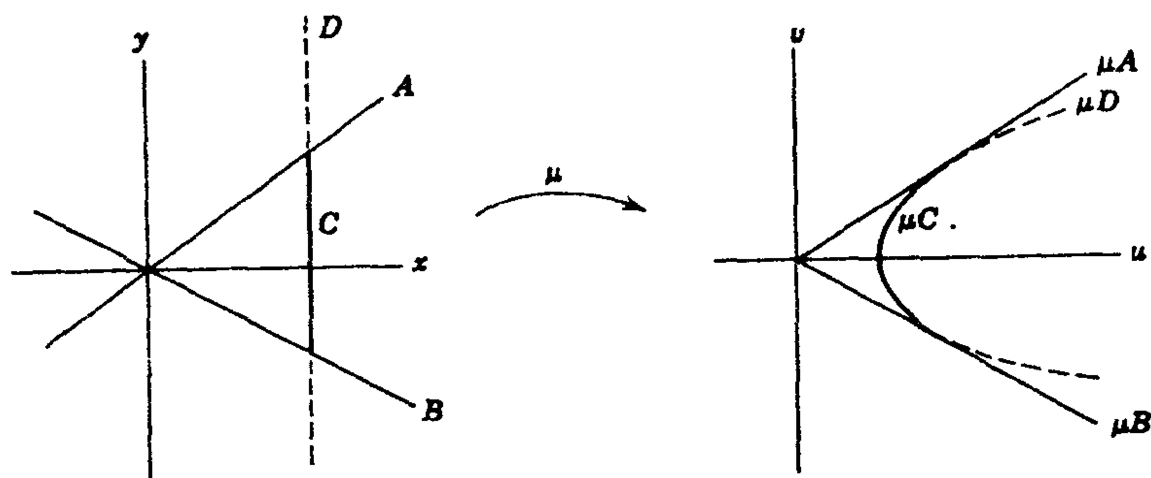


圖 2

出來。拋物線必須在 $(c, \pm c/\sqrt{2})$ 的影像點與兩條半線相交，在這交點 v 的值爲 $\pm 3/\sqrt{2}\, c^2$ 。另方面此拋物線的切線斜率爲：

$$v' = \frac{9c^2}{4v}$$

因此在交點之處，拋物線之斜率爲 $\pm 3/2\sqrt{2}$ 。換言之在這交點拋物線與兩條半線相切，如圖 2 所示。這樣整條拋物線就落在由兩條半線 μA 與 μB 所夾的開夾角領域 V 之中（除了切點）。直線 A 與 B 所劃分出來的四個非奇異點的領域全都在 μ 之下被映射到 V 上面，而在每個領域 μ 皆爲同構映射。因此對於任何非奇異點 p 而言，這四個開領域中包含 p 的那個，或者其中任何比較小的包含 p 的開鄰域都可以拿來當做逆函數定理中其存在性被肯定的鄰域 U 。可是沒有任何奇異點的鄰域能夠在 μ 之下一對一的被映射到 V 上，因爲這些鄰域被打褶(folded over)，因此有兩點被映射到同一點。至於原點 (0，0) 的鄰域情況更糟糕，他們被褶疊了兩次，因此在 μ 之下有四點被映射到同一點。

習題 1.2.1 考慮球座標或圓柱座標，試問必須加入怎樣的限制才能保證他們可被接納而取爲 R^3 中的 C^∞ 座標系統。試證除了其圓柱半徑 $r=0$ 之點（ z 軸 ）以外所有的點都可以被包含在這兩種座標系統的定義域中，

但並不同時都在一個座標系統之中。

習題 1.2.2 設$u:R\to R$爲恒等映射，則$u^3:R\to R$ 仍然保存一對一及連續的性質。同時具有連續的逆函數：$u^{1/3}:R\to R$。如果我們選取{$u^3:R\to R$}當作R上的圖表集，則這個單含一個圖表的圖表集能給出R上的一個流形的結構。證明這個流形結構並不是通常的流形結構。因爲在通常的標準結構裏$u^3:R\to R$並不是一個可接納的圖表。

(b) 開子流形

假設M是一個流形而N是M中任意的開子集。這時只要把M中的拓樸與座標映射從M限制到N，則N就立即具備了一個流形的結構。這樣的流形N稱爲M的開子流形。另外我們在第 1.4 節會提到一般的子流形之定義，其中子流形的維數可能小於M的維數。顯然 R^d 中任何的開子集都可視爲一個 d 維的流形。

習題 1.2.3 試證一個流形可以被考慮成 R^d 中的一個開子流形的充要條件是這個流形具有一個單單含有一個圖表的圖表集。

(c) 乘積流形

如果流形M與N之維數分別爲 d 與 e，則在卡氏乘積$M\times N$上給出流形結構的做法如下：

(1) 其拓樸取爲乘積拓樸，此即其基本鄰域爲M與N中基本鄰域的乘積。

(2) 其圖表集是M與N中個別圖表集中之圖表做乘積而組成。因此若設$\mu:U\to R^d$爲M上的一個圖表，$\varphi:V\to R^e$爲N上的圖表，則其乘積：

$$(\mu,\varphi):U\times V\to R^{d+e},\ (\mu,\varphi)(m,n)=(\mu m,\varphi n).$$

就取爲$M\times N$上的圖表。這時若x^i是μ的座標函數而y^j爲φ的座標函數，則在乘積圖表中(m,n)的座標應爲：

$$(x^1m,\ldots,x^dm,y^1n,\ldots,y^en)$$

因此若 $p: M \times N \to M$ ， $q: M \times N \to N$ 爲自然投射，則在 $U \times V$ 上的座標函數可以寫成：

$$z^1 = x^1 \circ p, \ldots, z^d = x^d \circ p, z^{d+1} = y^1 \circ q, \ldots, z^{d+e} = y^e \circ q.$$

這種乘積的運算顯然可以重複進行，此外我們也可拿同一個流形的幾個複本來做其乘積。因此甚至就流形的結構而言，我們仍然有：$R^d = R \times R \times \cdots\cdots \times R$ 。容易看出圓圈 S^1 這條曲線是個一維的流形。將 S^1 畫在 R^2 裏，則圓柱面這曲面就是流形 $S^1 \times R$ 而可以看成落在 $R^3 = R^2 \times R$ 之中。

接下來我們可以把 $S^1 \times S^1$ 看成一個聯集 $\{\{p\} \times S^1 \mid p \in S^1\}$ 。現在如果把第一個 S^1 看成是 R^3 中 xy 平面上滿足方程式：

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

之單位圓，而對於這圓圈上的每一點 p ，我們都把 $\{p\} \times S^1$ 看成一個以 p 爲中心，而其直徑垂直於第一個圓圈的較小半徑之圓圈，則聯集 $S^1 \times S^1$ 可看成這個較小的圓圈繞著 z 軸旋轉所得出的迴轉面 (surface of revolution)，或即一個圓環面，如圖 3 所示。容易看明從 R^3 引進到這個圓環面的拓樸結構其實正是乘積拓樸。

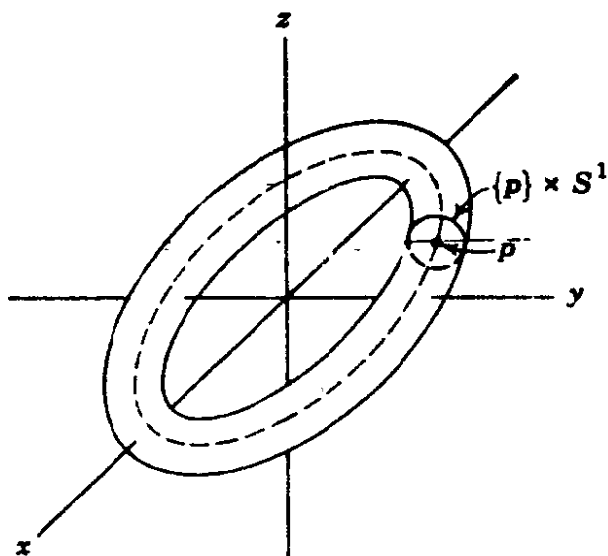


圖 3

這個環面就是通常用來描述一個雙擺之運動的所有可能位置，或即其狀位空間(configuration space)的模型。這兒所謂雙擺(double pendulum)就是一個具有兩根擺錘的機械系統，其中的第一根擺錘可以在一平面上繞著一條固定軸自由旋轉，至於第二根擺錘則繞著一條落在某一特定平面之上的軸旋轉。這個特定平面通常就取爲第一根擺錘的旋轉面，但是也可取爲別的相對於第一根擺錘爲固定的平面。這兩根擺錘跟他們各自所處的旋轉平面中之一組固定座標軸所夾的角度可用來跟環面通常參數表示中所出現的兩個角度相對應，而得出其間一一的對應關係。因此知道這種雙擺的狀位空間正好就是一個環面。注意在設計雙擺的銜接關節之時要弄得使每根擺錘都能就其軸自由的旋轉360度，否則的話所得的狀位空間就只能是環面中的一部分而已。事實上如果第二根擺錘受到第一根擺錘之軸之阻擋，因此其旋轉受限制於 $0<\varepsilon<v<2\pi$ ，則所得到的狀位空間模型更像一個水管式的圓柱面。

如果不僅使用兩根擺錘而使用更多的擺錘安置在一個精心設計的機械系統中，則這物理系統之狀位空間的模型就是更多個 S^1 的乘積。另方面如果銜接關節的設計是使得該擺錘不只能在一個平面上自由旋轉，而是能在空間中自由運動，那麼其狀位空間的模型可能就得使用到球面 S^2 來做乘積。最後如果第一根擺錘的一端並沒有被固定住，而被容許在空間中(或者在某平面中)自由移動，則其狀位空間的模型中必須另外再放入一個 R^3 (或者 R^2)的因子來做乘積。

一般而言，假設某個物理系統是由兩個系統所組成，其中每個系統能取得各自所有的位置，分別跟另一系統之存在與否無關。那麼這時的複合系統之位置流形(manifold of positions)(意即狀位空間)，就等於兩個子系統之位置流形的乘積。就算兩個子系統之間發生了某些動力的銜接關係(例如像重力的或者像彈性的)，則其狀位空間爲兩者之乘積一事仍然維持不變。

習題 1.2.4 取一根彈簧在其兩端都附著鉛錘。容許這系統在空間中自由運動，而只就彈簧之長度 L 加以限制，要求 $L_1<L<L_2$ 。試描述此系統之狀位空間而證明其爲 R^3 與另外兩個流形之乘積。

(d) 低維流形

一個零維的流形就是一些孤立點的集合，因此這集合具有離散拓樸。

一個一維的流形如果是連通的話，那麼或許是R或許是S^1。(這結果並不明顯，但是我們在這兒並不預備給予證明)。至於其他一維的流形則可取一些R及S^1之複本而做出彼此沒交點的聯集而得。爲了使得此流形能擁有可數的基本鄰域，這些組成的R或者S^1的個數必須有限個或可數個。

習題 1.2.5 令 $M = S^1 = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 = 1, a, b \in R\}$。從$R^2$引進拓樸到$M$上做爲其拓樸結構。定義映射 $f:M \to R$ 如下：①對於所有的$p \in S^1$，$0 \le fp < 2\pi$；②如果$p = (a, b) \in S'$，則$a = \cos fp$，$b = \sin fp$。注意這兩條件就唯一的確定了f這函數。

(a) 在下面有關座標映射的性質中，那一些是f所滿足的？

(1) 座標映射之定義域爲開集合。

(2) 座標映射是個嵌射。

(3) 座標映射具有開集做爲其像域。

(4) 座標映射是連續的。

(5) 座標映射之逆映射是連續的。

(b) 有那一個最大的集合能夠使得當我們把f限制於其上時，f能夠變成一個座標映射$\bar{f}$。

(c) 令g之定義完全與$\bar{f}$相似，只不過這時把g的像域從$(0, 2\pi)$換成隨便另外一個開區間。試證只需適當的選取g，我們能使得$\{\bar{f}:U \to R, g:V \to R\}$構成一個$S^1$上的解析圖表集。

我們不妨把二維的流形稱爲一個曲面，儘管可能存在某些二維的流形，他們無法被安放進R^3之中(請參看習題 1.2.13 以及 1.2.14)。而另方面也存在通常所謂的一些曲面，其上是具有某些奇異點的；必須把這些奇異點去掉才能得出我們所定義的流形。儘管有這些缺點，但是我們還是喜歡把二維流形叫做曲面，其原因只需回顧在R^3中我們如何得出曲面就不難看明。

(1) 考慮一個C^∞函數$f:R^3\to R$，而取其水平曲面(level surface)。對這曲面而言其奇異點就是使得$df=0$之點，此即在該處f的三個一次偏導數皆爲零。假設$p=(x_0,y_0,z_0)$是個非奇異點，因此不妨假設$\partial f/\partial y(p)\neq 0$，這時由隱函數定理在$R^2$中存在$(x_0,z_0)$的鄰域$U$使得方程式$f(x,y,z)=c$在其上有一個唯一解$y=g(x,z)$滿足$y_D=g(x_0,z_0)$。注意這個解爲$C^\infty$，而$c=fp$這樣我們就得出曲面上的一個子集合

$$V=\{(x,g(x,z),z)\mid(x,z)\in U\}$$

就曲面上由R^3所引進的相對拓樸而言這是個開子集。另外從V到xz平面的投射：

$$\mu:V\to U,\quad \mu(x,g(x,z),z)=(x,z),$$

就是V上的一個座標映射。

就水平曲面$f^{-1}c$上的非奇異部分而言，我們可以使用這樣所得出的座標映射來組成一個圖表集。現在假設在q的鄰域W中我們由條件$\partial f/\partial z(q)\neq 0$，而按上法得出適當的座標映射：

$$\varphi:W\to X\quad \varphi(x,y,h(x,y))=(x,y)$$

其中，$z=h(x,y)$是$f(x,y,z)=c$，就xy平面適當開子集X所得之C^∞解，滿足$f(x,y,h(x,y))=c$。這時在W與V重疊之處我們有：

$$\begin{aligned}\mu\circ\varphi^{-1}(x,y)&=\mu(x,y,h(x,y))\\&=(x,h(x,y)),\\ \varphi\circ\mu^{-1}(x,z)&=(x,g(x,z)).\end{aligned}$$

由於h與g皆爲C^∞函數，而當然x本身爲(x,y)或(x,z)的C^∞函數，可見兩個座標轉換映射$\mu\circ\varphi^{-1}$以及$\varphi\circ\mu^{-1}$皆爲C^∞映射。換言之，用這種方法所得出的圖表集之中任何兩個圖表皆彼此C^∞相關。而使得此

水平曲面上所有的非奇異點的集合構成一個C^∞流形。

舉例而言，取$f = x^2 + y^2 + z^2$，又取$c = 1$，則由$f = 1$所決定的水平曲面就是一個球面S^2。另方面由於$df = 0$只在原點發生，因此所有球面上之點皆爲非奇異點。

在開圓盤 $U_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 之上方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 具有兩個 z 的解析解：$z = \pm\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$。對應於他們可以得出 S^2 上的兩個圖表：$\mu_z^+ : U_z^+ \to U_z$, $\mu_z^- : U_z^- \to U_z$。其中U_z^+與U_z^-分代表 S^2 中的上半球與下半球（都不含赤道）。而$\mu_z^+(x, y, z) = (x, y)$，$\mu_z^-$ 亦類似定義。同樣我們可以給出前後及左右開半球上的圖表：$\mu_y^+ : U_y^+ \to U_y$, $\mu_y^- : U_y^- \to U_y$, $\mu_x^+ : U_x^+ \to U_x$, $\mu_x^- : U_x^- \to U_x$。全部這六個圖表可以構成S^2上的一個解析圖表集，因此使得S^2成爲一個解析的流形。

(2) 有時候曲面是用參數方程式來給出的。在 uv 平面上考慮一個開領域，在其上定義三個C^∞函數：

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v)$$

這三個函數就拿來當做曲面p點在空間 R^3 中的座標而得出此曲面的一個參數表示。這時此曲面的奇異點就是那種使得兩個切向量 $(\partial f/\partial u, \partial g/\partial u, \partial h/\partial u)$ 以及 $(\partial f/\partial v, \partial g/\partial v, \partial h/\partial v)$ 變成線性相關之點。在非奇異點這兩個切向量線性無關，因此生成一個平面稱爲曲面在這點的**切平面**（tangent plane）。可是在奇異點無法決定切平面，事實上這時切平面不見得存在。

現在假設(u_0, v_0)是一個非奇異點的參數，則在 R^2 中存在這點的開鄰域U，使得U到曲面的開子集V有一對一的對應關係。事實上由非奇異性的假設，下面三個行列式值中至少有一個不爲零：

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial h/\partial u & \partial h/\partial v \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \\ \partial h/\partial u & \partial h/\partial v \end{vmatrix},$$

例如假設第一個不爲零，則存在(u_0, v_0)的一個開鄰域U，使得在U上映射$(u, v) \to (f(u, v), g(u, v))$是個嵌射，而且有$C^\infty$的逆映射。因此當然在這$U$上映射 $(u, v) \to (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ 也必定是一個嵌射。而這個嵌射$U \to V$的逆映射就可拿來當做座標映射 $\mu : V \to U$ 使用。而把u，v當

做座標函數看待。從V到R^2的投射$\varphi:V\to W$，$\varphi(x,y,z)=(x,y)$也是一對一，而且跟μ互相C^∞相關。因此也可以換成使用φ來做爲座標映射使用。通常一般來講一個曲面的參數化表示常常會在一個遠比U還來得大的鄰域中都是一對一的。因此這個μ可以被擴大到一個更具包含性的座標映射。由於這緣故通常較喜歡使用μ而非φ。

有時一個曲面的參數表示就算單單限於考慮非奇異點也不見得能具有一一對應的性質。因爲有可能uv平面上有幾個不同的領域他們全都映射到曲面的同一部分。但是無論如何，在非奇異點附近這樣幾組不同座標函數之間的座標轉換都是C^∞的，因此曲面上所有的非奇異點的集合形成了一個二維的流形。

在一個非奇異點之鄰域上我們還可以給出一個垂直於其切平面的法向量（normal vector），而將其表成(u,v)的C^∞函數。取f爲沿著法線方向到曲面之距離，這是個C^∞函數。在局部上我們就可以由方程式$f=0$之解來得出我們的曲面。這樣我們已證明非奇異的水平曲面就是局部可參數化的曲面（其座標函數就取爲參數），而顚倒過來非奇異的參數表示曲面局部上也都可看成某個距離函數的水平曲面。可見上面描述曲面的兩種方法(1)與(2)在局部上其實是互相等價的。可是就整體而言兩者卻互不等價。因爲一個非奇異的水平曲面由於具有一個大域的（global）連續非零法向量場，所以一定具有雙面而爲可具號的（orientable），但是一個非奇異的參數表示的曲面卻有可能只具單面而爲不可具號的。例如考慮Möbius曲面，不難使用參數表示將其整個寫出來，可是這曲面是不具號的。

當我們將曲面寫成參數表示時，則所出現的奇異點可能有兩類。第一，曲面本身具有尖點或稜角，因此無法定義其切平面。這種奇異點是無法避免的。第二，不是曲面本身的難處，而是由參數表示所帶來的奇異性。關於這種第二類的奇異性我們可以使用球座標對單位球面之參數化表示來加以示範出來。這時球面可寫爲：

$$x=\sin u\cos v,$$
$$y=\sin u\sin v,$$
$$z=\cos u,$$

因此南北極（0，0，1）以及（0，0，−1）是奇異點。對於這種參數表示而言在 uv 平面的座標轉換可能取如下的兩種形式：

第一種是（u_α，v_α）與（u_β，v_β）之間都差一個 2π 的整數倍：

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= u_\beta + 2p\pi, \\
v_\alpha &= v_\beta + 2r\pi,
\end{aligned}
$$

第二種則是（u_α，v_α）與（u_γ，v_γ）之間把半徑軸顚倒方向來看，因此 u_α 與 u_γ 相差 π 的奇數倍，至於 v_α 與 v_γ 則相差一個符號，因此其間的關係可寫成：

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= u_\gamma + (2q + 1)\pi, \\
v_\alpha &= -v_\gamma + 2s\pi,
\end{aligned}
$$

這兒的 p，q，r，s 均爲整數，而座標映射 $\mu_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$，$\mu_\beta = (u_\beta, v_\beta)$，$\mu_\gamma = (u_\gamma, v_\gamma)$ 彼此皆 C^∞ 相關。

習題 1.2.6 試證 S^2 上可以給出一個單含兩個圖表的圖表集。

在 R^3 中的環面可以給成不具任何奇異性的參數表示：

$$
\begin{aligned}
x &= (a + b \sin v) \cos u, \\
y &= (a + b \sin v) \sin u, \\
z &= b \cos v,
\end{aligned}
$$

其中 a 代表落在 xy 平面中第一個圓圈 S^1 的半徑，而 b 就是另外那個其直徑垂直於第一圓的較小圓圈之半徑。兩個參數 u，v 表示對於各自的固定方向繞著這兩個圓圈所測的角度。這時在 uv 平面上可能的座標轉換之形狀爲

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= u_\beta + 2p\pi, \\
v_\alpha &= v_\beta + 2q\pi,
\end{aligned}
$$

其中 p 與 q 爲任意整數。

習題 1.2.7 試證前面所給的環面之參數表示能夠在三個不同的領域中具有逆映射，因此我們可以得出一個具有三個圖表的圖表集。

(e) **超曲面**(hypersurface)

我們可以把曲面的觀念推廣到高維的情形。就像我們處理曲面時已給過的證明，我們能得到由水平超曲面之所有非奇異點所組成的集合構成一個($d-1$)維的流形。這兒爲定義一個水平超曲面，我們可以考慮一個 C^∞ 函數 $f: R^d \to R$，對於任意常數 c，如下的集合

$$M = \{m \mid fm = c, df_m \neq 0\},$$

就是這個水平超曲面中的非奇異點集。現在可以使用隱函數定理來找出($d-1$)維的**座標超平面**(coordinate hyperplane)。由超曲面到此座標超平面的投射就得出($d-1$)個局部座標。這種局部座標可以有多種的選法，由隱函數定理他們彼此之間都互相 C^∞ 關連。另方面我們也可以考慮這個超曲面在 R^d 中的參數表示，其參數個數當然是($d-1$)個。更一般也可以考慮 R^d 中具有 h 個參數的流形之參數表示，其中 $h < d$。若此參數表示的賈氏矩陣之秩爲其參數之個數，則說該點爲非奇異點。

就像 S^2 的情形，我們可以定義 d 維的球面爲：

$$S^d = \left\{p \in R^{d+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d+1}(u^i p)^2 = 1\right\}.$$

我們一共可以考慮 2($d+1$)個從半球到座標面的投射，他們都是些座標映射，而可以構成一組圖表集。

習題 1.2.8 R^d 中的開子集並非緊緻集合(參考第零章後半段第14節)。試證明一個緊緻的流形(例如 S^d，這是 R^{d+1} 中的有界封閉子集合)不可能擁有任何單只含有一個圖表的圖表集(比較習題 1.2.3)。

習題 1.2.9 在 R^3 中考慮一根長度爲 L 之直棒。設其一端之座標爲(u^1, u^2, u^3)而另端之座標爲(u^4, u^5, u^6)。我們就可以把這根直棒的所

有位置之集合看成爲R^6中如下的超曲面：

$$(u^1-u^4)^2+(u^2-u^5)^2+(u^3-u^6)^2=L^2.$$

試證明這個超曲面也可以看如$R^3\times S^1$。

前面將$S^1\times S^1$放在R^3中以得出一個環面的作法可以推廣成把$S^d\times S^e$嵌射進R^{d+e+1}以成爲一個超曲面。首先把S^d放在：

$$R^{d+1}=R^{d+1}\times\{0\}\subset R^{d+e+1}.$$

之中，而在S^d的每一點都拿一個半徑較小的S^e之複本安放於一個與S^d相垂直的R^{e+1}之中。

(f) 黏貼在一起的流形

爲給出一個流形我們只需指明其圖表集裏頭每個圖表的座標值域，重疊的座標定義域之部分在這些座標值域裏的影像，以及在每個這種重疊座標定義域中所應有的座標轉換。當我們指定所有這些資料而想看清這些資料所代表的流形時，首先我們知道只需單純要求所有的座標映射皆爲同胚映射，我們就已決定了其上的拓樸結構，可是這時我們必須小心處理這些座標值域重疊部分之認同問題以便給出這流形的 Hausdorff 拓樸性質。

(1) 假設有兩個圖表$\mu:U\to S$以及$\varphi:V\to S$其座標值域爲同一個長方形S：

$$S=\{(a,b)\mid -5<a<5,\ -1<b<1\}.$$

現在假設重疊的定義域$U\cap V$在μ與φ之下的影像同爲這長條的左右兩邊緣：

$$\begin{aligned}T&=\mu(U\cap V)\\&=\varphi(U\cap V)\\&=\{(a,b)\mid -5<a<-4\text{ 或 }4<a<5\text{ 以及 }-1<b<1\}.\end{aligned}$$

這時所剩下還必須定義的就是在這T之上的座標轉換$\mu\circ\varphi^{-1}$或者$\varphi\circ\mu^{-1}$。現在假設所指定的資料如下：

$$\mu \circ \varphi^{-1}(a, b) = \begin{cases} (a + 9, b) & 若 -5 < a < -4, \\ (a - 9, -b) & 若 4 < a < 5. \end{cases}$$

讀者若想搞清楚這時的流形到底像個什麼樣子，那麼不妨自己拿兩片同樣的長紙條把他們的兩端按照上面轉換式黏貼起來，第一片的左端貼到第二片的右端，而第一片的右端上下扭轉來貼到第二片的左端。

上面這種在適當地方黏貼的操作可以較數學化地藉著等價關係的講法來交代清楚。就目前這實例而言，兩個座標映射具有同一個值域 S ，因此我們的做法是先複製出兩個 S 的複本而標示為 S_1 與 S_2 。現在考慮其聯集 $P = S_1 \cup S_2$ ，而想透過所給的座標轉換在 P 中引入一個等價關係：

設 $s \in S$ ，我們以（s，1）及（s，2）分別代表在複本 S_1 與 S_2 中相應的 s 。因此對於任意 s，$t \in S$ ，定義 P 中之等價關係 E 如下：

$$\begin{aligned}
&(s, 1)E(t, 1) \text{ iff } s = t, \\
&(s, 2)E(t, 2) \text{ iff } s = t, \\
&(s, 1)E(t, 2) \text{ iff } t \in T \text{ 以及 } s = Ft, \\
&(s, 2)E(t, 1) \text{ iff } s \in T \text{ 以及 } t = Fs.
\end{aligned}$$

其中 F 代表座標轉換 $\mu \circ \varphi^{-1}$ ，而 T 代表影像 $\varphi(U \cap V)$ 。

容易證明上面所給的確為等價關係，而且這時的等價類只含一個或兩個元素：假設 $s \notin T$ ，$t \in T$ ，則有：

$$\begin{aligned}
&[s, \alpha] = \{(s, \alpha)\}, \qquad 在此 \ \alpha = 1 或 2, \\
&[t, 1] = \{(t, 1), (F^{-1}t, 2)\}, \\
&[t, 2] = \{(Ft, 1), (t, 2)\}.
\end{aligned}$$

為了方便敍述，我們將座標映射 μ ，φ 改寫為 μ_1 ，μ_2 ，而取 S_α（$\alpha = 1$，2）中之所有元素所屬的等價類之集合 $[S_\alpha]$ 為 μ_α 之定義域 U_α 。然後直接取

$$\mu_\alpha[s, \alpha] = s.$$

由於這些 μ_α 都必需是 $M = P/E$ 上的座標映射，因此 M 上的拓樸結構必須

取得使這些 μ_α 是同胚映射。因此M上之開集合可以分成如下的三類：(a) U_1 中之子集合爲開集合當且唯當此子集合在 μ_1 之下的影像爲 S 中之開子集；(b)同樣 $B_2 \subset U_2$ 爲開子集當且唯當 $\mu_2(B_2) \subset S$ 是個開子集；(c) M 中的子集 B 若不是 U_1 的子集，也不是 U_2 的子集，則 B 爲 M 中開集合的充要條件爲 $B \cap U_1$ 與 $B \cap U_2$ 分別按上定義是 U_1 及 U_2 的開子集。

習題 1.2.10 試證明以上所定義的黏貼流形 M 是個 Hausdorff 空間，而且也是個解析流形。

習題 1.2.11 在上面所考慮的問題中把 S 以及座標轉換都擴充到包含 $b = \pm 1$ 的部分，則所得的 M 會具有一個邊界流形，試問這邊界流形本質上是什麼？

(2) 現在我們進一步來考慮一個稍微複雜的實例。在所給定的圖表集之中我們有三個座標系統，而且他們的值域皆爲 R^2。令他們分別爲：$\mu_1 = (x^1, x^2), \mu_2 = (y^1, y^2), \mu_3 = (z^1, z^2)$，而且他們之間的座標轉換爲：

$$\begin{aligned} x^1 &= 1/y^2, & x^2 &= y^1/y^2, \\ y^1 &= 1/z^2, & y^2 &= z^1/z^2, \\ z^1 &= 1/x^2, & z^2 &= x^1/x^2. \end{aligned}$$

只需像實例(1)一樣，取 R^2 的三個複本而運用上面座標轉換式來定義其聯集之中的等價關係就可得出一個流形。可是這個流形其實有一個更具體的解釋。取 R^3 中其中心落在原點的單位球面 S^2。定義 S^2 上任意一組對頂點互相等價，而取 M 爲其等價類。因此 M 中的一個元素可以表示成一組無序對(non-ordered pair) $\{p, -p\}$，其中 $p \in S^2$。如果 $p = (a, b, c)$，則 $-p = (-a, -b, -c)$。我們也可以把 M 中的元素解釋爲 R^3 中通過原點的直線，因此通過 p 與 $-p$ 的那條直線就對應於 $\{p, -p\}$。這種流形通常稱爲**解析實射影平面**(analytic real projective plane)。

如果 x, y, z 爲 R^3 的卡氏座標，則所有像 x/y, x/z, y/z 等等比值他們在 p 與 $-p$ 的值相同。因此這些比值可以認爲是 M 中那些使其分母不

爲零之子集上的函數。這時M上可以取出三組座標映射爲：

$$\mu_1 = (y/x, z/x) = (x^1, x^2),$$
$$\mu_2 = (z/y, x/y) = (y^1, y^2),$$
$$\mu_3 = (x/z, y/z) = (z^1, z^2).$$

μ_1的座標定義域就是那種滿足$xp \neq 0$之點$\{p, -p\}$所組成的集合。同樣μ_2，μ_3的定義域分別由條件$yp \neq 0$，$zp \neq 0$來給出。

考慮高維的球面，而把其對頂點互相認同我們照樣可以得出高維的射影空間。

習題 1.2.12 如同一個圓圈可以想成是將一條半閉的區間$[0, 2\pi)$彎轉起來以便將端點0補進空位2π之上，我們照樣可以考慮環面是由圖4

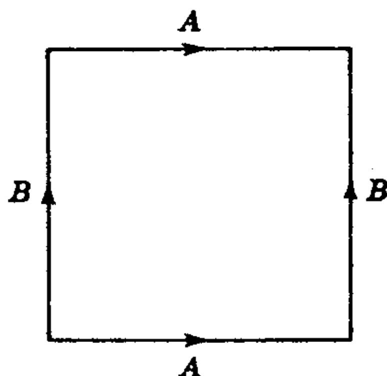


圖 4

中所示的半閉正方形$[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$按同一方向將閉邊褶疊並補入其相對空邊而得到。請實際以紙片示範操作。

習題 1.2.13 證明有一種得出射影平面的做法就是將一個如圖5所示的半閉正方形按相反方向將閉邊褶疊並補入其相對之空邊而得到。

要看出這種做法確實能得出射影平面，只需將此方形有彈性的拉扯而籠罩住上半球，使得其邊緣重合在赤道上就立即看出。注意由於這時所出現的四個角，我們這種做法只是就拓樸的觀點來做這樣的認同，而不去管

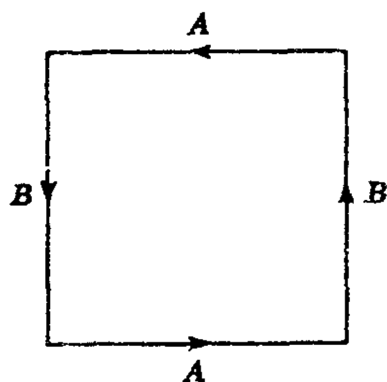


圖5

這射影平面上頭的微分結構。

習題 1.2.14 對於一個半閉正方形還有一種做法如圖6所示。我們把A組的相對邊按同方向加以認同，但是對B組邊卻按相反方向加以認同。這

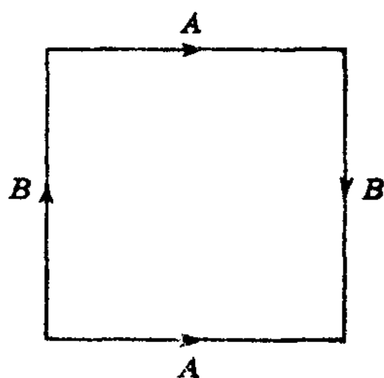


圖6

時所得的二維流形名字叫做Klein瓶。由於四個角落被銜接得很理想，因此這種認同的操作是可微分的。試仿照上面實例(1)與(2)的做法運用四個圖表來給出Klein瓶的解析定義。注意這兒所要用的四個圖表之中心分別在原正方形之中心，角落（合成一點），以及兩個邊的中點。

如同對環面的情形，我們可以把Klein瓶在R^4中給成一個參數表示。對於xy平面中半徑爲a的圓圈上的每一點我們現在可以考慮R^4中一個與此圓圈相垂直的三維超平面。現在把一個半徑爲b的較小的圓圈就其

一條直徑按照原來半徑爲 a 之圓迴轉之一半的速率來旋轉，因此當這小圓迴轉回原出發點時正好多旋了半週而可以使 B 異向相認同。這樣可以解析地給出這時的參數表示式爲：

$$\begin{aligned} x &= (a + b\sin v)\cos u, \\ y &= (a + b\sin v)\sin u, \\ z &= b\cos v\cos u/2, \\ w &= b\cos v\sin u/2. \end{aligned}$$

在圖 6 uv 平面中彼此被認同的點在這組方程式之下被映射到 R^4 中的同一點。

註：如果把射影平面或者 Klein 瓶設法擠進三維的 $\mathbb{R}^3$ 中，那麼一定會自己跟自己相交。要描述這種自行相交的情況，可以在 $\mathbb{R}^3$ 中拿兩個 $\mathbb{R}^2$ 的複本而彼此相交成一直線。這時沿著交線上的點都可以看成扮演兩種身分，每一點都被考慮成兩點，一點落在一個平面 $\mathbb{R}^2$ 上，而一點落在另個平面 $\mathbb{R}^2$ 上。就像這樣射影平面或Klein 瓶被放在 $\mathbb{R}^3$ 時會產生自行相交的現象，因此這時我們不說這曲面被安放進或嵌射進 (imbedded) $\mathbb{R}^3$ 中，而說他們被滑射進 (immersed) $\mathbb{R}^3$ 中。把射影平面滑射入 $\mathbb{R}^3$ 時所得的曲面有時稱爲 Boy 曲面。

我們也可以考慮三維的射影空間 $\mathbb{R}P^3$。就其流形結構而言可以將其看如所有其行列式值爲 + 1 的 3 × 3 正交方陣的集合。由於這種方陣又可看如環繞原點的旋轉，因此我們可以將三維射影空間之流形看如三維空間中具有一固定點，但卻可以自由繞任意通過這固定點之軸旋轉的物體之所有可能位置所構成的狀位空間流形。

現在如果所考慮的物體可以在空間中任意運動，則爲決定其位置可以先選定此物體之一點的位置，然後說明此物體以何方位旋轉。由於這兩種選定各自獨立，所以此物體之所有位置的狀位空間可給爲 $R^3 \times RP^3$ 。

1.3 可微映射

設 M 與 N 爲 C^∞ 流形而 $F:M \to N$ ，如果 F 表成局部座標之間的映射

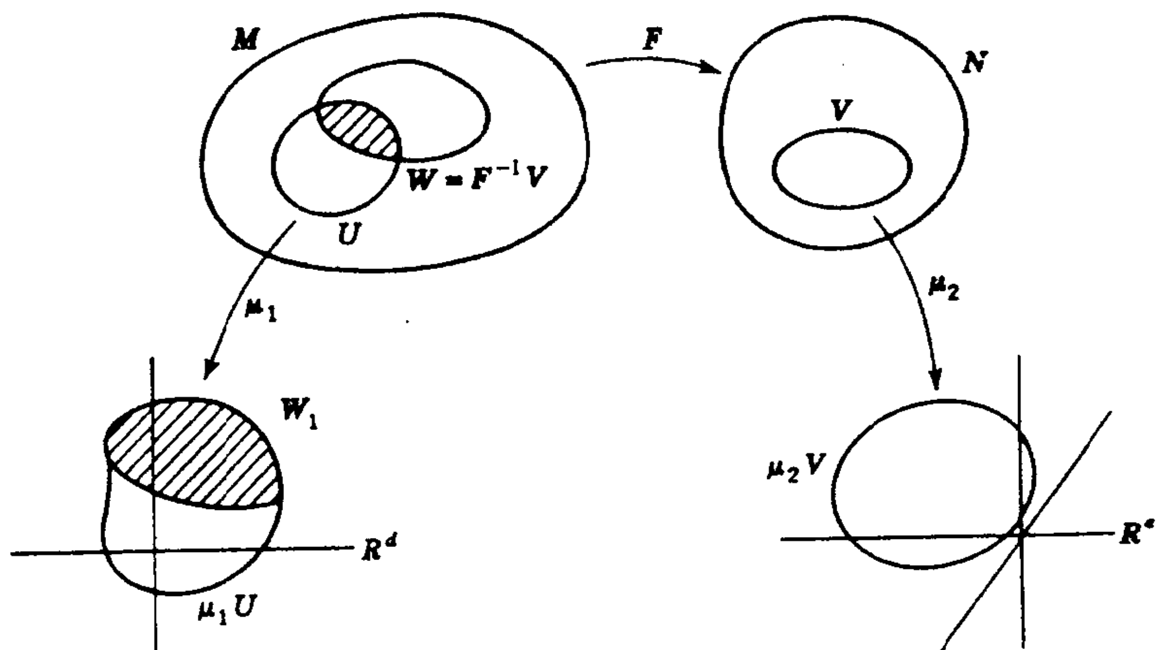


圖 7

時其組成座標函數皆爲 C^∞，則說F是個 C^∞映射。下面就仔細來給出並說明這種看來十分自然的定義。

設 $\mu_1:U\to R^d$ 以及 $\mu_2:V\to R^e$分別爲M與N上之 C^∞ 圖表，因此這兒U與V分別是M與N之開子集。假設 $F:M\to N$ 是連續函數，因此$W=(F^{-1}V)\cap U$ 爲M中之開子集，如圖 7 所示。

取$W_1=\mu_1 W$，因此W_1是 R^d 中的開子集。我們說 F 之 μ_1-μ_2 座標表示就是映射 $\mu_2\circ F\circ\mu_1^{-1}: W_1\to R^e$。如果對於所有可接納的圖表 μ_1，μ_2 而言，F的所有這種座標表示皆爲 C^∞（卡氏空間之間的）映射，則說F是個C^∞映射。

定理 1.3.1 只要考慮 μ_α 與 μ_β 分別爲任意屬於M與N之某圖表集之中的圖表。如果這時F的所有這些 μ_α-μ_β 座標表示皆爲 C^∞卡氏映射，則必定F是C^∞映射。

證明 設 $\{\mu_\alpha: U_\alpha\to R^d\mid\alpha\in I\}$ 及 $\{\mu_\beta: V_\beta\to R^e\mid\beta\in J\}$ 分別爲M與N之圖表集。滿足對於任意的 $\alpha\in I$，$\beta\in J$ 座標表示 $\mu_\beta\circ F\circ\mu_\alpha^{-1}$ 皆爲

C^∞映射。現在任意取定義中所考慮的圖表μ_1與μ_2，必須證明：$\mu_2 \circ F \circ \mu_1^{-1}: W_1 \to R^e$亦爲$C^\infty$映射。可是$C^\infty$這性質是種局部的性質，因此只需證明在$W_1$之每點的鄰域這個映射爲$C^\infty$就可。設$m_1$爲$W_1$中任意元素，則存在$\alpha \in I$與$\beta \in J$滿足$\mu_1^{-1} m_1 = m \in U_\alpha$以及$n = Fm \in V_\beta$。由假設$\mu_\beta \circ F \circ \mu_\alpha^{-1}$是$C^\infty$映射。但是$\mu_1$與$\mu_2$分別都與$\mu_\alpha$與$\mu_\beta$互相$C^\infty$相關，因此$\mu_\alpha \circ \mu_1^{-1}$有定義而且在$m_1$的某鄰域爲$C^\infty$，同時$\mu_2 \circ \mu_\beta^{-1}$也有定義，而且在$n_\beta = \mu_\beta n$之某鄰域爲$C^\infty$映射。可見全部的合成映射$\mu_2 \circ \mu_\beta^{-1} \circ \mu_\beta \circ F \circ \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\alpha \circ \mu_1^{-1}$也是$C^\infty$映射，可是這映射定義於$m_1$之某鄰域之上，而且與$\mu_2 \circ F \circ \mu_1^{-1}$限制到這鄰域上相重合，因此得證$\mu_2 \circ F \circ \mu_1^{-1}$在$m_1$之鄰域上爲$C^\infty$。□

在實際上要證明一個映射爲C^∞就必須證明其座標表示的各個成分都擁有任意高次的連續偏導數。我們可以把這e個成分記爲：$u^i \circ \mu_2 \circ F \circ \mu_1^{-1} = f^i, i = 1, \ldots, e$，他們都是定義在$R^d$之開子集$W_1$上具有$d$個實變數的實値函數。

若令$y^i = u^i \circ \mu_2$以及$x^j = u^j \circ \mu_1$分別代表μ_2以及μ_1的座標函數，則可寫成$y^i \circ F \circ \mu_1^{-1} = f^i$或即$y^i \circ F = f^i \circ \mu_1$。對於任意$m \in W$，可得：

$$\begin{aligned} y^i F m &= f^i \mu_1 m \\ &= f^i(x^1 m, \ldots, x^d m). \end{aligned}$$

習慣上這個關係式可以直接寫成：

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^d), \tag{1.3.1}$$

可是在這寫法中沒有把原先的F放進來，所以我們以爲使用下列表達更理想：

$$y^i \circ F = f^i(x^1, \ldots, x^d). \tag{1.3.2}$$

(1.3.1)式以及(1.3.2)式也叫做F之座標表達式(coordinate expression)。

特別當$N = R$時，上面所考慮的就簡化成M上的C^∞實值函數。事實

上在定義 C^{∞} 映射時只需知道如何定義 C^{∞} 實值函數就可，因爲有關一般 C^{∞} 映射的定義可以透過如下的定理來獲取：

定理 1.3.2 設 $F: M \to N$ 。對於任意 N 中的開子流形 V ，如果 V 上每一個 C^{∞} 實值函數 $y: V \to R$ 都能夠使得 $y \circ F$ 也是 M 中開子流形 $F^{-1}V$ 之上的 C^{∞} 實值函數，則必定 F 是個 C^{∞} 映射。

證明　取 y 分別爲 V 上的各個座標函數 y^i 就立即得出證明。□

如果 $F: M \to N$ 是個平滑的同構映射，而且假設其逆映射 F^{-1} 也是 C^{∞} 映射，則說 F 是個從 M 到 N 之上的可微同胚(diffeomorphism) 。如果兩個流形之間存在有一個可微同胚映射，則說這兩個流形互相可微同胚。這是流形之間最自然的等價或同構關係。就流形之結構而言兩個互相可微同胚的流形具有完全相同的性質。特別如果單考慮其拓樸性質，他們也完全相同，因此他們互相同胚 (homeomorphic) 。

實例(a) 考慮

$$F = \frac{u}{1-u^2} : (-1, 1) \to R.$$

現在把 u 就 $x = Fu$ 解出。這時應注意 u 的值必須落在 $(-1, 1)$ 之中，而且當我們把 u 換成爲 $-1/v$ 時，F 的表達式完全不變，因此可得 F 的逆映射 F^{-1} 可寫成：

$$u = \frac{2x}{1+\sqrt{(1+4x^2)}} = F^{-1}x.$$

(因爲當我們以 $x = u/(1-u^2)$ 代入上式時確能得出 u) 。這樣看出 F 是 $(-1, 1)$ 到整個 R 的可微同胚映射，因爲 F 與 F^{-1} 都表爲有理函數，其分母總不爲零，因此皆爲 C^{∞} 函數。

現在如果 (a, b) 是隨便一個開區間，則顯然

$$\tfrac{1}{2}[(1+u)b+(1-u)a]:(-1,1)\to(a,b)$$

是個從（－1，1）到（a，b） 的可微同胚。可見R中任意連通的有界開子流形皆與R本身互相可微同胚。不難證明R中其他的連通開子流形，像（$-\infty$，b）或（a，∞）也都與R互相可微同胚。

(b) 取F爲實例(a)中之映射，試證明

$$F\times F:(-1,1)\times(-1,1)\to R^2$$

爲開正方形到R^2的可微同胚。

(c) 令x，y爲R^2上的卡氏座標。若把單位圓盤：

$$D^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

看成R^2中的開子流形，而把x，y限制到D^2上頭來並稱之爲u，v。沿著直徑以類似F的方法來定義映射$G:D^2\to R^2$如下：

$$x\circ G=\frac{u}{1-u^2-v^2},$$
$$y\circ G=\frac{v}{1-u^2-v^2}.$$

我們能把逆映射$G^{-1}:R^2\to D^2$之座標表示寫成：

$$u\circ G^{-1}=\frac{2x}{1+\sqrt{(1+4x^2+4y^2)}},$$
$$v\circ G^{-1}=\frac{2y}{1+\sqrt{(1+4x^2+4y^2)}}.$$

基於類似F與F^{-1}的理由，這兩個映射都是C^∞的同構映射，因此G是個可微同胚，而知開圓盤與R^2互相可微同胚。這樣也得到開圓盤與開正方形互相可微同胚。

一個拓樸流形M之上可能考慮兩個不相同的C^∞圖表集，他們彼此之

間並不 C^∞ 相關，因此就給出這拓樸流形M上的兩個不相同的可微結構。但是在這兩個這樣得出的不同可微流形之間有可能存在一個可微同胚映射使得兩者彼此互相可微同胚。這時的特點是M上的恒等映射並不是可微同胚映射，因此使得兩個圖表集無法C^∞相關。

能證明當M之維數小於或等於四時，M上任何兩個可微流形結構一定都互相可微同胚。而另方面任何其維數大於或等於七的緊緻流形之上必定存在幾個互相不可微同胚的C^∞流形結構。換言之兩個可微流形之間可能會存在同胚映射，但是卻不存在任何可微同胚映射。

現在來給互相可微同胚的不相同可微結構之最簡單的實例。首先在R上取標準的可微結構，就是單含一個圖表 $\{u:R\to R\}$ 的圖表集，這時的可微流形記爲R。另外又在R上考慮單含一個圖表：$\{u^3:R\to R\}$ 的圖表集，這樣得出的可微流形就記爲M。考慮從M到R的映射 u^3 及其逆映射 $u^{1/3}$，他們都是 C^∞ 函數，因爲其座標表示分別爲 $u\circ u^3\circ u^{1/3}=u$ 以及 $u^3\circ u^{1/3}\circ u=u$，所以當然都可微分而知 $u^3:M\to R$ 是這兩個流形之間的可微同胚映射。可是如果考慮M到R的恒等映射 $u:M\to R$，能證明它並不是可微同胚，因爲儘管其逆映射 $u:R\to M$ 之座標表示爲 $u^3\circ u\circ u=u^3$ 是個可微映射，可是 $u:M\to R$ 本身之座標表示卻爲：$u\circ u\circ u^{1/3}=u^{1/3}$，因此並非 C^∞ 映射。可見M與R之間的恒等映射並非可微同胚，或即M與R眞的是不相同的可微流形。

在維數大於或等於七的流形上存在有彼此互相不可微同胚的 C^∞ 結構之實例。這種實例描述起來不太簡單。

習題 1.3.1 設 $\mu:U\to R^d$ 是可微流形M上的一個可接納的圖表。則U是M中之開子集，而 $V=\mu U$ 是 R^d 中的一個開子集。因此可以將U及V看成可微流形。他們分別是M與R^d的開子流形。試證 $\mu:U\to V$ 是個可微同胚映射。

習題 1.3.2 試證兩個 C^∞ 映射的合成映射也是一個 C^∞ 的映射。

實例 球面的參數表示 $F:R^2\to R^3$：

$$F(u, v) = (\cos u \sin v,\ \sin u \sin v, \cos v)$$

是個 C^∞ 映射。這個 F 在 R^2 與 R^3 的標準座標之下的座標表示就是上面定義式中所寫的形狀。我們也可以將其寫成：

$$\begin{aligned} x \circ F &= \cos u \sin v, \\ y \circ F &= \sin u \sin v, \\ z \circ F &= \cos v. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

如果我們把同樣這個公式看成定義一個映射 $F: R^2 \to S^2$，則它仍是個 C^∞ 映射。現在在 R^2 上取標準圖表 (u, v) 做爲其圖表集，而在 S^2 上取 1.2 節實例(d)所給的六個圖表所組成的圖表集。則所能得出的六個 F 的座標表示分別是把公式 (1.3.3)逐次拿出兩條來而且限定於 R^2 中適當的開子集。球面的參數表示 F 具有奇異性這項事實並沒有影響這映射之具有 C^∞ 的性質。

習題 1.3.3 如第 1.2 節實例(f)，(2)取 RP^2 爲射影平面，而將其看成無序對之集合 $\{\{p, -p\} \mid p \in S^2\}$。試證二對一的映射：$F: S^2 \to RP^2$，$Fp = \{p, -p\}$ 是個 C^∞ 映射。

習題 1.3.4 取上題所給的 $F: S^2 \to RP^2$，試證若 $G: M \to S^2$ 爲連續，而且使得 $F \circ G: M \to RP^2$ 爲 C^∞ 則必定 G 亦爲 C^∞。給出一個實例其中 G 不連續但 $F \circ G$ 卻爲 C^∞ 的。

習題 1.3.5 假設 S 是 R^3 中不具奇異點的曲面，試證包含映射 $i: S \to R^3$ 是個 C^∞ 映射。分別考慮水平曲面與參數曲面這兩種情形。

習題 1.3.6 設 C 代表所有複數的集合，若將其看成流形則就等於 R^2。現在取 $M = C \times C$。考慮複數間之乘法爲：$F: M \to C: F(z, w) = zw$，試證 F 是個 C^∞ 映射。

習題 1.3.7 把 S^1 看成 C 中以 0 爲圓心的單位圓。則有 $S^1 \times S^1 \subset C \times C = M$。取 $G: S^1 \times S^1 \to S^1$ 爲習題 1.2.6 中之 F 的限制，試證這個 G 也是 C^∞ 映射。

習題 1.3.8 取 $M = C - \{0\}$，所有這些非零的複數就構成 R^2 中的開子流形。定義 $H: M \to M$；$Hz = 1/z$，試證 H 爲 C^∞。

習題 1.3.9 試證投射 $p: M \times N \to M, q: M \times N \to N, p(m, n) = m, q(m, n) = n$ 皆爲 C^∞ 映射。另外也證明所有的入射（injection）$i_n: M \to M \times N$, ${}_mi: N \to M \times N, i_nm = {}_min = (m, n)$ 皆爲 C^∞ 映射。

習題 1.3.10 設 $F: P \to M \times N$ 而 p 及 q 爲上題中所定義的投射。試證如果 $p \circ F: P \to M$ 以及 $q \circ F: P \to N$ 皆爲 C^∞ 的話則必定 F 亦爲 C^∞ 映射。

1.4 子流形

假設 $F: M \to N$ 是個一對一的 C^∞ 映射滿足對於 M 中的每一點 m，存在 m 的鄰域 U 以及一個在 Fm 的圖表 $\mu: V \to R^e$，$\mu = (y^1, \cdots\cdots, y^e)$ 使得其中的前面 d 個在 F 之下變成 U 上的座標：（此即：$x^i = y^i \circ F|_U, i = 1, \cdots\cdots, d$ 爲 U 上的座標），則說這種映射 F 是個從 M 到 N 的嵌射（imbedding）。

如果在上面 F 的條件中去掉 F 爲一對一的要求，則說 F 是個滑射（immersion）。因此滑射在局部上就是一個嵌射，此即要求 M 中之每點 m 都具有某個在 F 之下能被嵌射入 N 的開鄰域 U。請參看圖 8。

如果 $F: M \to N$ 是個嵌射，我們加給 FM 適當的流形結構，使得 $F: M \to FM$ 是個可微同胚。這時我們就定義 FM 是 N 中的一個子流形。因此子流形的維數不可能大於外面包含它的流型 N 的維數。如果兩者的維數相等，則這子流形就是前面已經提過的 N 中的開子流形。

一個子流形的拓樸結構不見得就是 FM 能夠從 N 自然引進的拓樸結構。當然按定義由 FM 到 N 的包含映射必須是 C^∞ 映射，因此也爲連續映射

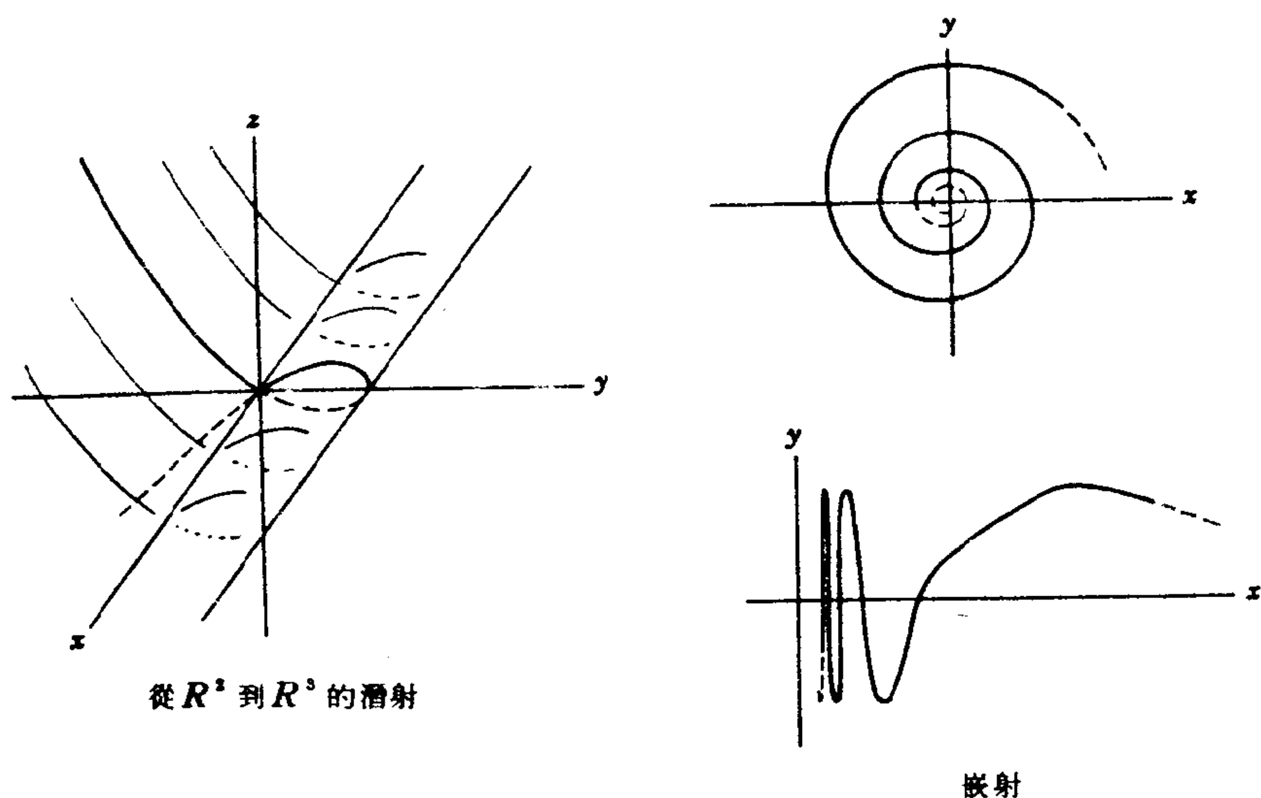


圖 8

，所以在FM之引入拓樸中任何FM的開子集都是子流形FM的開子集。但是這FM的子流形拓樸中可能含有更多的開集合。

實例(a) 將R^2中的一條開線段(segment)扭曲成8字形，如圖9所示。在這子流形的引入拓樸中，中央點的每一個開鄰域都必需包含線段兩端的一小段。可是在子流形拓樸中，卻存在中央點的開鄰域是不包含線段兩端一小段的。



圖 9

實例(b) 取 $Ft = (e^{it}, e^{i\alpha t}) \in S^1 \times S^1 \subset C \times C$，其中$\alpha$是一個無理數。則$F: R \to S^1 \times S^1$是個嵌射。如圖 10 所示$FR$繞著環面一直打旋，結果稠

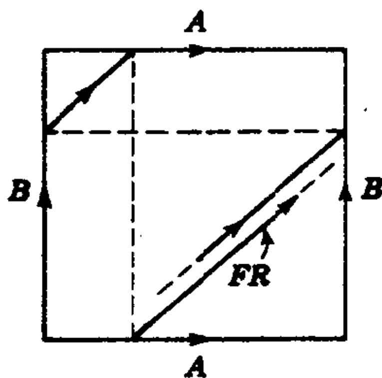


圖10

密的（densely）充滿了整個環面。任意環面中的開子集都會被FR交過無窮多次。因此在從環面所引入的拓樸中一個開子集會含有無窮多的小片，而且總是在R中爲無界的（unbounded）。這樣的拓樸結構顯然跟R上之標準拓樸相差很大。

按定義，一個子流形必須以一個相當特別的方法被放在包含它的外在流形之中。譬如像尖點（cusp）或角落（corner）這種奇異點就不許出現，儘管對於一個非爲嵌射的一對一C^∞映射而言這種奇異點有可能發生。下面爲了能夠更仔細來描述子流形的特別本質，我們就來引入一個e維流形N中d維的座標切片的觀念。現在設U爲N中的一個座標鄰域，其中以y^1，……，y^e爲座標。則U中之子集：

$$\{m \mid m \in U, y^{d+1}m = c^{d+1}, \ldots, y^e m = c^e\}$$

稱爲一個d維的座標切片（coordinate slice），其中c^i爲一組決定這切片的常數。因此這切片可以看成座標值域R^e中一個d維平面在座標映射之下於U中的逆像。

定理 1.4.1 假設M是N中的子流形，則對於M中任意點m存在一個m在N裏適當的座標鄰域（y^1，……，y^e）使得對應於常數$c^{d+1} = y^{d+1}m, \ldots, c^e = y^e m$之座標切片正好形成$m$在$M$中的一個鄰域，而且當我們把前面$d$個座標$y^1$，……，$y^d$限制到這個座標切片時就構成$M$中的一組局部座標。

證明　令$F : P \to N$爲嵌射滿足$FP = M$。選擇N中在m點之鄰域的局部座標$z^1, \cdots\cdots, z^e$使得$x^1 = z^1 \circ F|_U, \ldots, x^d = z^d \circ F|_U$正好構成$p = F^{-1}m$點之座標鄰域$U \subset P$中之座標。由於$F$爲$C^\infty$，我們可以按照(1.3.2)式寫成$F$之座標表示：

$$z^i \circ F = f^i(x^1, \ldots, x^d), \qquad i = 1, \ldots, e,$$

其中f^i爲R^d中適當開集合上的C^∞函數。由上面取法顯然對$i = 1, \cdots, d$而言，$f^i(x^1, \cdots\cdots, x^d) = x^i$。可是對於$i > d$而言，這些$f^i$就不是這麼簡單了。因此定義：

$$\begin{aligned} y^i &= z^i, \qquad i \le d, \\ y^i &= z^i - f^i(z^1, \ldots, z^d), \qquad i > d. \end{aligned}$$

這使得其逆映射可寫爲：

$$\begin{aligned} z^i &= y^i, \qquad i \le d, \\ z^i &= y^i + f^i(y^1, \ldots, y^d), \qquad i > d, \end{aligned}$$

因此兩個座標映射$\mu_1 = (z^1, \cdots\cdots, z^e)$與$\mu_2 = (y^1, \cdots\cdots, y^e)$互相$C^\infty$相關。由於$\mu_2$的定義域是包含於$\mu_1$的定義域之中，因此顯然$\mu_2$是$N$上的一個可接納的圖表。這時$FU$就是座標切片$y^{d+1} = 0, \cdots\cdots, y^e = 0$而且把$y^1, \cdots\cdots, y^d$限制到$FU$時就在$F$之下對應到$x^i$。因此他們在$FU$上構成$M$之局部座標。□

註：上面的定理並沒有說我們能夠把所有M中落在m點之N中的鄰域裏全部的點都放在一個單一的座標切片之中。事實上對於實例(a)中8字形中央點m而言這事不可能辦到。同樣對於實例(b)中的所有點m這事也辦不到。

由定義上面定理1.4.1的逆定理顯然成立。此即如果某個子集合的流形結構在局部上是由座標切片所決定，因此在子集合上就是由那d個非常數的座標來當做此座標切片的座標以使這子集合成爲流形，則必定此子集合是個子流形。Whitney曾證明任何可微流形都一定跟某個適當高維數的

R^e 中的子流形互相可微同胚。如果 d 是此流形的維數，則頂多只需取 $e = 2d+1$ 就可以。因此如果我們喜歡，就不妨直接把流形的理論看成是卡氏空間中某些特別子集合的研究。

實例(c) 設 $f: R^d \to R$ 是個 C^∞ 函數。考慮一個水平超曲面中的非奇異點的集合：

$$M = \{m \mid fm = c, df_m \neq 0\}$$

則這集合是一個 ($d-1$)維的子流形，同時其上的拓樸結構就是由 R^d 中所引入的拓樸結構。

事實上對於 M 中每一點 m ，f 的 d 個一次偏導數中至少有一個不為零，譬如說 $\partial f/\partial u^d(m) \neq 0$ 。這樣我們在 m 的一個適當的鄰域中就可以拿 ($u^1, \cdots\cdots, u^{d-1}, f$) 來做為 R^d 的座標系統，因為它對於原座標系統 ($u^1, \cdots\cdots, u^d$) 的賈氏方陣行列式值為 $\partial f/\partial u^d \neq 0$ 。在這鄰域中 M 裏的點就是落在 ($d-1$)維座標切片 $f = c$ 中的點。因此根據定理 1.4.1 之逆 M 為子流形。在上面附註中所提到的子流形不見得滿足的性質對於現在的水平超曲面而言卻總能滿足。

習題 1.4.1 映射 $F: R \to R^2$ $Ft = (t^2, t^3)$ 顯然是個 C^∞ 映射，可是它卻不是個嵌射。請問原因何在？

習題 1.4.2 試證明習題 1.3.9 所提到的入射(injection)：

$$i_n: M \to M \times N \;;\; {}_m i: N \to M \times N$$

皆為嵌射。而且 $M \times N$ 中之子流形 $i_n M$ 以及 ${}_m iN$ 所具有的拓樸結構就是從 $M \times N$ 所引入的相對拓樸。

習題 1.4.3 設 $F: M \to N$ 為任意 C^∞ 映射。定義 F 之圖形為 $\{(m, Fm) \mid m \in M\} \subset M \times N$ 。試證 F 之圖形是 $M \times N$ 中具有引入相對拓樸的子流形。事實上此子流形的嵌入映射為 $(i, F): M \to M \times N$ $(i, F)m = (m, Fm)$.

1.5 可微曲線

在某些人的用法中常把曲線直接認爲就是一個一維的子流形。可是在本書的用法中，我們把曲線當做一種特別的參數表示。因此如果改換一條曲線的參數表示，那麼在我們的用法中理應看成是另一條曲線。但是我們又常忽略這種差別而把一條曲線看成如同一個點集。在本節中所考慮的曲線大都具有首尾兩端，但是我們以後也會考慮沒有端點的曲線。

所謂一條可微曲線就是從一個區間到一個流形的映射。而且要求這映射的定義域可以擴充到一個開區間而成爲其上的 C^∞ 映射。至於此曲線的定義域可以隨便那一類型的區間都無所謂。開區間，閉區間，半開半閉區間，有界區間或無界區間都可以。

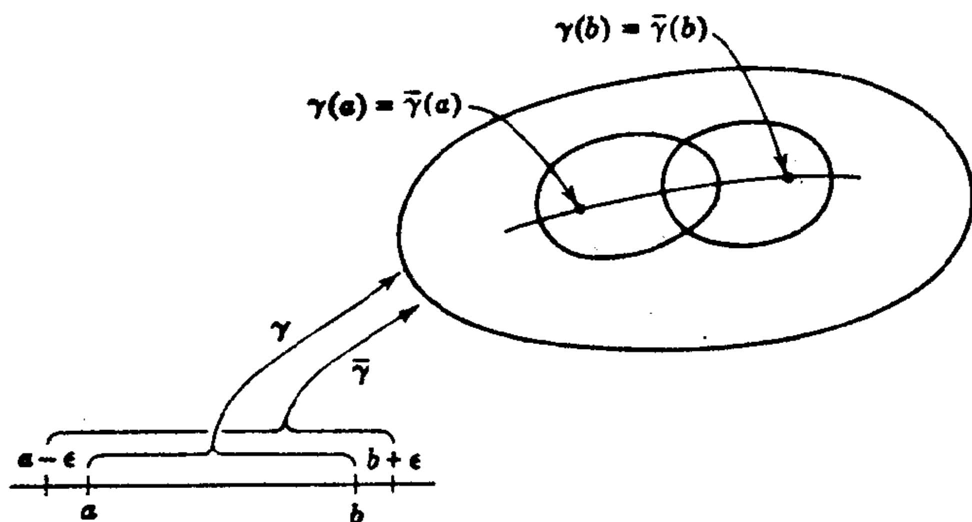


圖 11

設 $\gamma:[a,b]\to M$ 是個 C^∞ 曲線，則按照定義存在一個常數 $\epsilon>0$ 以及一條 C^∞ 的延拓曲線 (extension curve) $\bar{\gamma}:(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\to M$ 滿足對於所有 $x\in[a,b]$ 皆有 $\gamma x=\bar{\gamma}x$ 成立，如圖 11 所示。γa 稱爲曲線 γ 的起點，γb 稱爲其終點。又說 γ 是一條從 γa 到 γb 的 C^∞ 曲線。如果曲線 γ 定義在閉區間 $[a,b]$ 之上而且滿足條件 $\gamma a=\gamma b$，就說這是一條封閉曲線。如果封閉曲線在 $[a,b)$ 之上是個嵌射，則說這是一條單純封閉曲線。

一條 C^∞ 曲線可能彎回來交在自己上面，也可能具有尖點，又可能漸漸停止然後再重新前進，有時甚至轉了一個很尖銳的角度，請參看下面的實例(a)。由於這些常出現的情況使得一條曲線無法成爲一個嵌射，甚至使得其像域變得不是個一維的子流形。有時候一條曲線甚至具有這麼多的尖點使得我們無法將其分段成有限個子流形。

在實例 1.4 (b)我們考慮環面上的一條曲線 $F: R \to S^1 \times S^1$，能夠任意的接近 $S^1 \times S^1$ 上的所有點。這曲線的像域是一個一維的子流形。在習題 1.4.1 裏所考慮的那條曲線 $F: R \to R^2$ 在原點具有一個尖點。

實例(a) 考慮 f 是習題 1.1.1 (a)中所給的 C^∞ 函數：

$$fx = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{若 } x > 0, \end{cases}$$

則 $\gamma x = (fx, f(-x))$ 就給出了一條 C^∞ 曲線 $\gamma: R \to R^2$。它是沿著正 y 軸進到原點 (0，0)，停止在原點，然後沿著正 x 軸離開。

(b) 取 $h: R \to R$ 爲一個在區間 (0，1) 之外爲零的 C^∞ 機率分佈 (probability distribution) 曲線，藉下式來給出：

$$hx = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \leq 0 \text{ or } x \geq 1, \\ ce^{1/x(x-1)} & \text{若 } 0 < x < 1, \end{cases}$$

其中 c 是個正值的規範化常數 (normalizing constant)，正好選得讓隆起的 h 函數所遮蓋的面積爲 1。取 g 爲 h 的不定積分：

$$gx = \int_0^x h(t)\,dt$$

定義 C^∞ 函數 f 如下：

$$fx = \begin{cases} gx - g(x-2) & \text{若 } 0 \leq x < 4, \\ f(x+4) & \text{對所有 } x \text{ 値} \end{cases}$$

這個 f 是個週期性函數 $f0 = 0$，當 x 從 0 遞增到 1 時 fx 隨之遞增到 1，

然後在$1 \leq x \leq 2$的區間f值保持爲常數1，而在$2 \leq x \leq 3$的區間f值遞減到零，然後在$3 \leq x \leq 4$的區間f值保持爲常數零。從4到5其值又遞增到1然後保持爲常數1等等。現在取曲線$\gamma : R \to R^2$給爲$\gamma x = (fx, f(x+1))$，則當x從0遞增到4時，曲線γ由點$(0, 1)$沿單位正方形之邊歷經$(1, 1)$，$(1, 0)$，$(0, 0)$而回到$(0, 1)$。因此γ是單位正方形之周界的一個C^∞週期性的參數化表示。

註：如果一條C^∞曲線在m點不只像尖點只逆轉其方向，而是在m點轉動一個角度，那麼這曲線的座標表示之所有各次的導數在m點之值必定全都爲零。因爲按定義從曲線不同的兩方向趨近於m點時，其切線的斜率應趨近於兩個不同的極限值。設μ就是在m點鄰域所考慮的座標映射，而$\mu \circ \gamma = (f^1, \cdots\cdots, f^d)$是曲線$\gamma$的座標表示，而假設$\gamma 0 = m$。如果所有$f^i$的導數在0不全爲零，則存在一個最低次的非爲零的導數，譬如說，設之爲f^1的第n次導數。現在考慮比值$\left(\dfrac{df^i}{dt} \Big/ \dfrac{df^1}{dt}\right)$當$t$趨近於零時之極限．則根據L'Hopital法則以及導數之連續性並$\dfrac{d^n f^1}{dt^n}(0) \neq 0$的假設可得：

$$\lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{df^i}{dt}}{\dfrac{df^1}{dt}} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{d^n f^i}{dt^n}}{\dfrac{d^n f^1}{dt^n}} = \frac{\dfrac{d^n f^i}{dt^n}(0)}{\dfrac{d^n f^1}{dt^n}(0)}.$$

這比值的極限就所有i來一起考慮時代表此曲線之切線從兩邊趨近於m時的斜率。按假設應隨著$t \uparrow 0$或$t \downarrow 0$而有兩個不同的極限。但是現在按上式看來卻只有一個極限值，可見與假設不合，而知所有f^i之全部導數在m點之值必須全都爲零。

習題 1.5.1 考慮R^2中一個$(n+1)$邊的多邊形，其各個角的位置分別爲(a_i, b_i), $i = 0, 1, \ldots, n$。試給出這個多邊形之C^∞參數表示。

在M中從p到q點的一條連續曲線就是一個連續映射$\gamma:[a,b]\to M$滿足$\gamma a=p$，$\gamma b=q$ 。以後會遇到許多的定理提到一些連續的東西可以被一些C^∞的東西所趨近。現在我們就曲線來示範這一類的定理。

定理 1.5.1 假設在M中存在一條從p到q點的連續曲線，則必定也存在一條從p到q點的在M中的C^∞曲線。

證明 設$\gamma:[a,b]\to M$ 爲M中從p到q的連續曲線。在每一點γx我們都可以適當縮小其座標鄰域，使得其座標映射在R^d中的像域是一個開球。由於$\gamma[a,b]$爲緊緻集合，存在有限個這種座標鄰域使得其聯集已能遮蓋整個曲線。因此可以適當分割$[a,b]$成$x_0=a<x_1<\cdots<x_{n-1}<b=x_n$使得對於所有$i$而言$\gamma x_i$與$\gamma x_{i+1}$落在同一個座標鄰域之中。在座標映射之下這兩點在$R^d$中的對應點的連接直線完全落在座標像域中，而可以加以參數表示並使其所有座標函數之各次導數在兩端點之值皆爲零。其做法類似於實例(b)中的做法。現在把所有各個線段所表示的參數適當加以變換以使得在每一點γx_i他們能夠互相配合，則我們就得出整條從p到q點的曲線之C^∞參數化表示。是由有限的線段所組成，而且每線段表成其適當座標時是直線。□

定理 1.5.2 假設C^∞流形M是連通的，則M中任意兩點都可以使用一條C^∞曲線來相連接起來。因此特別就得到M是弧線連通的。

證明 M爲連通的意思就是M中同時是開集又是閉集的子集合只有M與空集合(ϕ)兩個。因此只需證明所有能用M中的一條C^∞曲線來與p點相連接的點集S構成一個同時爲開集又爲閉集的子集合。但是p點顯然落在S中而不可能爲空集合，因此S必定爲M本身。

爲證明S爲閉集合，我們考慮S中的一個序列$\{q_i\}$。假設這是M中的收斂序列而$q=\lim q_i$，只需設法證明這個q必定落在S中就可。對於任意以q點爲中心的座標圓球而言，其中必定都含有無窮多個q_i點。因此只需考慮從p到這些q_i中的某一個的連接曲線，然後再加進從這q_i

點到 q 點就這座標圓球而言的連接線段，然後適當調整參數使得在轉角處也具有 C^{∞} 性質，那麼我們就得出一條連接 p 到 q 的 C^{∞} 曲線了，可見 q 點一定落在 S 中，因此 S 是閉集合。

可是另方面如果 $q \in S$，可以考慮包含 q 的適當小的座標圓球，這圓球中任意一點都可以跟 q 用一條線段相連。因此也都可以跟 p 用一條 C^{∞} 曲線相連。換言之整個 q 的座標圓球都落在 S 中而知 S 爲開集合。這就證明 $S=M$，因此 M 中每點都能使用 C^{∞} 曲線與 p 點相連。□

因此就流形而言我們不用區別連通性與弧線連通性。可是就流形之拓樸子空間而言這兩種觀念是有差別的。

1.6 切向量

直覺上一條 C^{∞} 曲線在其一般的點具有確定的方向與速率乃是理所當然的事。當然在上面的實例中也曾出現一些 C^{∞} 曲線是會在某些點形成大的轉角的。因此在這些轉角處曲線沒有單一的方向。可是在這些轉角處我們的實例都指明其速率爲零。可是話又說回來，這種速率的觀念只是就某一參數表示來講的，因爲在流形上我們還沒有給定任何自然的距離的概念，所以顯然無法絕對的定義速率的觀念。這樣看來當我們在談論一條曲線的速率時會涉及這條曲線相對於具有同方向之曲線的速率的概念。這樣我們把速率跟方向混合在一起，又不單考慮一條曲線我們就發展出一個**切向量**（tangent vector）或者**速度向量**（velocity vector）的概念來。因此本節預備給出一個運作起來十分方便，又富有方向及速率之直覺意義的關於切向量的定義。我們要說明對 C^{∞} 函數之**運算**（或**算子**）（operator）的觀念確能用來定義切向量，這種運算是沿著所考慮曲線，使用其參數而來對流形上所有 C^{∞} 實值函數求其導數的運作。就如同在 R^3 的向量分析中求取**方向導數**（directional derivatives）的做法。換言之我們要說明只要我們知道了這曲線穿越所有函數之水平超曲面的時候有多快，那麼我們就能決定此運動之方向及速率了。實際上我們只需在一組座標函數上獲取這些資料就已夠用，可是在下面的定義中我們儘量避免特別使用某組座標函數，免得讀者產生錯誤的印象，覺得某種座標系統會優於別的座標系

統。在談過這些引言後我們就眞的來給出切向量的定義。

任取$m\in M$，令$F^{\infty}(m)$代表所有C^{∞}函數$f:U\to R$ 的集合，其中U是隨便一個M中包含m點的開子流形。在這集合$F^{\infty}(m)$上我們立即可以引入相當豐富的代數結構。設U，V爲包含m的開子集而$f:U\to R$，$g:V\to R$，則可定義這兩函數之和與乘積如下：

$$f+g: U\cap V\to R \qquad \text{及} \qquad fg: U\cap V\to R$$

$$(f+g)n = fn+gn \qquad \text{及} \qquad (fg)n = (fn)(gn).$$

對於任意實數c，我們可以考慮常數函數$c:M\to R: cm=c$(對所有m點其値皆爲c)，這樣的常數函數顯然都落在$F^{\infty}(m)$之中。顯然對於每個$f\in F^{\infty}(m)$都有：

$$f+0=f,\ 1f=f.$$

我們也定義$-f=(-1)f$。這時對於加法，減法及乘法的通常一些代數律，像交換律，結合律，分配律等等全都自然能滿足。這兒唯一必需注意的一件事是有關函數定義域的問題。兩個函數相等必需同時要求他們之定義域相等，因此若$f:U\to R$，則不應說$f+(-f)=0$，$0f=0$。正確的說法應該是$f+(-f)=0f=0|_U$。這兒的差別在於$0|_U$特別指明這是只定義在U之上的零函數，而非定義在整個M上的零函數，因爲原先f只定義於U之上。以後爲了方便我們可能直接寫$f+(-f)=0$，但是我們心裏應明白這式子的正確解釋是$f+(-f)=0|_U$。

定義：在$m\in M$點的切向量是一個函數（運算）：

$$t: F^{\infty}(m)\to R$$

滿足對於所有的$f,g\in F^{\infty}(m)$, $a,b\in R$下面兩條件皆能成立：

(a) t 爲線性：$t(af+bg) = atf+btg.$

(b) t 滿足特別的乘積關係：$t(fg) = (tf)gm + fm(tg).$

這樣的運算通常叫做**導運算**（derivation），因此一個切向量是$F^{\infty}(m)$上的導運算。

切向量（tangent vector）的一些常用同義字爲 vector （向量），tangent （切線），contravariant vector（逆變向量）等等。

我們以 M_m 來代表M上在m點所有切向量的集合。而稱之爲M在m點的切空間。在 M_m 中能很自然的擁有向量空間的代數結構，其中兩個切向量可以相加，一個實數可以乘以一個切向量，其定義如下：對於任意 s，$t \in M_m$，$a \in R$，$f \in F^{\infty}(m)$ 取：

$$(s+t)f = sf + tf, \qquad (as)f = asf, \qquad 0_m f = 0.$$

容易證明這時所得的 $s+t$，as 以及 0_m 都落在M_m 中，而且所有向量空間所需滿足的公設全都能滿足。關於這切空間的仔細性質我們在第二章裏會詳加討論。

定理 1.6.1 對於每一個 $t \in M_m$ 以及常數函數 $c \in F^{\infty}(m)$ 而言，都有 $tc = 0$。

證明 由性質(a)與(b)可得

$$\begin{aligned} ct1 &= t(c1) \\ &= (tc)1 + ct1 \\ &= tc + ct1. \end{aligned}$$

消去$ct1$ 立即得出 $tc = 0$。□

定理 1.6.2 如果$F^{\infty}(m)$ 中的兩函數 f 與 g 在m的某一鄰域U 上相重合，則對於任意 $t \in M_m$ 都有 $tf = tg$。

證明 取 1_U 是U 上的常數函數 1，則由假設在U 上有 $1_U f = 1_U g$，因此由性質(b)可得：

$$\begin{aligned} t(1_U f) &= t1_U \cdot fm + 1tf \\ &= t1_U \cdot fm + tf \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t(1_U g) \\
&= t1_U \cdot gm + tg \\
&= t1_U \cdot fm + tg,
\end{aligned}
$$

因爲 $gm = fm$ 。因此立即得出 $tf = tg$ 。□

現在如果 γ 是 M 中的一條 C^∞ 曲線滿足 $\gamma c = m$ ，我們要定義 γ 在 c 點的切向量 $\gamma_* c \in M_m$ 如下：對於每一個 $F^\infty(m)$ 中的函數 f 我們指定：

$$(\gamma_* c)f = \frac{df \circ \gamma}{du}(c).$$

則容易證明 $\gamma_* c$ 確爲一個在 m 點的切向量，因爲對於任意 $f, g \in F^\infty(m)$ 以及 $a \in R$ 由下式

$$
\begin{aligned}
(f + g) \circ \gamma u &= f(\gamma u) + g(\gamma u) \\
&= (f \circ \gamma + g \circ \gamma)u,
\end{aligned}
$$

以及類似的考慮立即可得：

$$(f + g) \circ \gamma = f \circ \gamma + g \circ \gamma, \qquad (fg) \circ \gamma = (f \circ \gamma)(g \circ \gamma), \qquad (af) \circ \gamma = a(f \circ \gamma).$$

使用微分運算 $d/du(c)$ 的基本性質立即得證 $\gamma_* c$ 滿足條件(a)，(b)。

如果 c 是 γ 之定義區間中的端點，則在上面定義中我們可以採用單邊的導數，但是也可以先把 γ 換成一個定義在大一點的開區間上的延拓 $\bar{\gamma}$ ，然後對 $\bar{\gamma}$ 使用相同的定義。

習題 1.6.1 (a) 假設 C^∞ 曲線 γ 正好使得 $\gamma_* c = 0_m$ ，則定義 $\gamma_{**} c$: $F^\infty(m) \to R$ 爲：

$$2(\gamma_{**} c)f = \frac{d^2 f \circ \gamma}{du^2}(c).$$

試證這時 $\gamma_{**} c$ 落在 M_m 之中，而爲在 m 點的切向量。

(b) 如果 $\gamma_* c \neq 0_m$，試證上面 $\gamma_{**} c$ 之定義式並不能給出一個在 m 點的的切向量。

這樣我們就說，在（一階）切向量 $\gamma_* c = 0_m$ 時，我們可以對 γ 在 c 點指定一個**二階的**(second order ）切向量 $\gamma_{**} c$ 。

習題 1.6.2 (a) 證明存在一個 C^∞ 函數 $f: R \to R$ 滿足：

$$
\begin{aligned}
fu &= 1 \qquad \text{若} |u| < 1, \\
fu &= 0 \qquad \text{若} |u| > 2.
\end{aligned}
$$

(b) 設 x^i 爲在 m 點鄰域的座標系統滿足 $x^i m = 0$，而且他們於區間 $|x^i| < 3/a$ 裏有定義。則證明如下定義的 $g: M \to R$

$$
gn = \begin{cases} f(ax^1 n) f(ax^2 n) \cdots f(ax^d n) & \text{若} \ |x^i n| < 3/a, \\ 0 & \text{其他情形，包含} \ n \ \text{不在} \ x^i \ \text{鄰域之中} \end{cases}
$$

是個 C^∞ 函數。而且透過適當選擇 a，我們能使得 g 在其上不爲零的集合變得任意的小。

(c) 設 $h \in F^\infty(m)$，則必定存在 C^∞ 函數 $k: M \to R$ 使得 h 與 k 在 m 的某一鄰域上其值完全重合。

(d) 取 $F^\infty(M)$ 爲定義於整個 M 上的實値 C^∞ 函數全體之集合。試證明在定義 M 於 m 點之切向量時，可以根本將原定義中的 $F^\infty(m)$ 替換成 $F^\infty(M)$，而仍能得到基本上相同的概念。

1.7 坐標向量場

假設 $\mu = (x^1, \ldots, x^d)$ 是在 m 點的一個座標系統，則對於任意 $f \in F^\infty(m)$，我們可以考慮 f 的座標表示：$f \circ \mu^{-1} = g: U \to R$，其中 U 是 R^d 中的開子集。如同 (1.3.1) 式及 (1.3.2) 式的寫法可表成：

$$
f = g \circ \mu = g(x^1, \ldots, x^d)
$$

這時 U 上的實値函數 g 按定義應爲 C^∞ 函數，因此對於 R^d 中的卡氏座標 u^i 可以取得 g 的各次的偏導數。這些 g 的偏導數與 μ 的合成函數就可看

如 $F^{\infty}(m)$ 中另些元素的座標表示。我們將其定義爲 f 對於座標 x^i 的各次偏導數。因此特別有：

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial u^i} \circ \mu = \frac{\partial f \circ \mu^{-1}}{\partial u^i} \circ \mu.$$

當我們只考慮一種座標系統而不慮混淆時，可以直接以較簡單的符號 ∂_i 來代表 $\partial/\partial x^i$。此外如果在 R^2 或 R^3 中考慮我們也習慣上使用符號 ∂_x，∂_y，∂_z 來代替 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 或 $\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2, \partial/\partial u^3$。至於這些偏導數的定義域當然是 f 的定義域與此座標鄰域的交集。

我們可以把求一次偏導數的運算看成一種映射：

$$\partial_i : F^{\infty}(m) \to F^{\infty}(m)$$

這時對於任意 f，$g \in F^{\infty}(m)$ 以及 a，$b \in R$ 下列條件自然滿足：

(a) $\partial_i(af + bg) = a\, \partial_i f + b\, \partial_i g,$
(b) $\partial_i(fg) = f\partial_i g + g\partial_i f.$

這些性質與在 m 點之切向量的性質非常類似也容易加以證明，因爲在卡氏乘積 R^d 中通常的偏導數運算 $\partial/\partial u^i$ 就滿足這些條件。我們把 ∂_i 這種運算（或算子）稱爲 $(x^1, \cdots\cdots, x^d)$這個座標系統中的座標向量場。

如果對函數 $f \in F^{\infty}(m)$ 施加 ∂_i 的運算之後再求取所得到函數在 m 點之值，則所得到的就是一個在 m 點的切向量 $\partial_i(m)$，此即：$\partial_i(m)f = \partial_i f(m)$。若取通過 m 點的第 i 個座標曲線 γ_i 爲：

$$\gamma_i u = \mu^{-1}(x^1 m, \ldots, x^{i-1} m, u, x^{i+1} m, \ldots, x^d m).$$

則切向量 $\partial_i(m)$ 正好是在 m 點 γ_i 的切向量。因爲若取 $c = x^i m$，則對於每個 $f \in F^{\infty}(m)$，都有

$$\begin{aligned}(\gamma_{i*} c) f &= \frac{d f \circ \gamma_i}{du}(c) \\ &= \frac{d}{du}(c) f \circ \mu^{-1}(x^1 m, \ldots, u, \ldots, x^d m)\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^i}(\mu m) f \circ \mu^{-1}$$
$$= \partial_i f(m).$$

可見 $\gamma_{i*}c = \partial_i(m)$ ，正如前述。

設V爲一個座標鄰域，除了對於V中的每一點m我們都可以把 ∂_i 看成一個從$F^\infty(m)$到$F^\infty(m)$的函數（映射）之外，我們還可以把 ∂_i 看成爲從V到$\{M_m \mid m \in V\}$的函數，對於V中的每一點m就指定到一個落在m點的切向量$\partial_i(m)$。

習題 1.7.1 對於每一串實數 $a^i \in R,\ i = 1, \ldots, d$ 考慮如下在m點的切向量

$$t = \sum_{i=1}^{d} a^i\, \partial_i(m) \in M_m.$$

試證明存在一條C^∞曲線 γ 滿足 $\gamma 0 = m$ 以及 $\gamma_* 0 = t$ 。

習題 1.7.2 試證 $\partial_i x^j = \delta_i^j = 0$ 若 $i \neq j$ ；1 若 $i = j$ 。這個 δ_i^j 稱爲 Kronecker 符號，或爲常數 0 或爲常數 1，而在這兒將其當做常數函數看待。因此若 $t = \sum_{i=1}^{d} a^i\, \partial_i(m)$ 試證明 $tx^i = a^i$ ，而可將 t 寫成：

$$t = \sum_{i=1}^{d} (tx^i)\, \partial_i(m).$$

習題 1.7.3 設γ是一條C^∞曲線而x^i爲在$m = \gamma c$之座標，試證存在一組實數$a^i \in R$滿足：

$$\gamma_* c = \sum_{i=1}^{d} a^i\, \partial_i(m).$$

接下來我們要說明在上面三個習題裏頭所討論到的切向量是非常一般的。此即 $\partial_i(m)$ 構成切空間 M_m 中的一組基。在第二章我們將詳細討論向量空間中基的概念，這兒我們只把習題1.7.2 中的結果放進下面的定理中。這定理非常重要，以後我們常常會加以使用。

定理 1.7.1 對於每一個切向量 $t \in M_m$ 存在唯一的一組常數 a^i 滿足：

$$t = \sum_{i=1}^{d} a^i \partial_i(m),$$

這組常數就是 $a^i = tx^i$ 。

證明 我們不妨假設對每個指標 i 都有 $x^i m = 0$ 。因爲將座標原點加以平移 $y^i = x^i + b^i$ (b^i 爲常數) 並不影響切向量，這時仍得 $\partial / \partial y^i = \partial / \partial x^i$ 。因此我們從 $x^i m = 0$之假設出發來證明這定理。爲此我們先來證明對於任意函數 $f \in F^\infty(m)$ ，存在一些函數 $f^i \in F^\infty(m), i = 1, \ldots, d$ ，使得在m的某一鄰域中 f 可表成：

$$f = fm + \sum_{i=1}^{d} x^i f_i.$$

這叫做 f 在m點的一階泰勒展式。如果我們暫時假設這展式成立，則只要把 $\partial_j(m)$ 作用於這等式的左右兩邊就得到：

$$\begin{aligned}\partial_j f(m) &= 0 + \sum_{i=1}^{d} [\partial_j x^i(m) f_i m + x^i m \, \partial_j f_i(m)] \\ &= f_j m.\end{aligned}$$

現在 t 是個切向量，因此 t 作用於常數函數時結果爲零，而可計算 tf 之值爲

$$tf = t(fm) + \sum_{i=1}^{d} t(x^i f_i)$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{d} [(tx^i) f_i m + x^i m \, t f_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{d} (tx^i) \, \partial_i(m) f,$$

由於作用於每個函數 $f \in F^\infty(m)$ 時 t 與 $\sum_{i=1}^d (tx^i)\,\partial_i(m)$ 所得的結果都相同。所以他們應該相等。另方面若 $t = \sum_{i=1}^d a^i \,\partial_i(m)$，則 $tx^j = \sum_{i=1}^d a^i \,\partial_i x^j(m) = a^j$，因此係數 a^i 爲唯一的一組。

可見現在所剩下的問題只是來證明函數 f 之一階泰勒展式的存在性。由於可以透過座標映射 μ 來把一切都搬到卡氏空間 R^d 來，因此我們若能證明 f 的座標表示 $g = f \circ \mu^{-1}$ 可以擁有一階泰勒展式：

$$g = a + \sum_{i=1}^{d} u^i g_i,$$

其中 a 爲常數而 $g, g_i \in F^\infty(0)$，又 $0 = (0, \cdots\cdots, 0)$ 爲 R^d 之原點，則：

$$f = g \circ \mu = a + \sum_{i=1}^{d} (u^i \circ \mu) g_i \circ \mu$$

$$= a + \sum_{i=1}^{d} x^i f_i,$$

其中定義 $f_i = g_i \circ \mu$。

在 R^d 中對任意兩點 $p = (p^1, \ldots, p^d)$, $q = (q^1, \ldots, q^d)$ 以及任意實數 b，可以定義 $bp = (bp^1, \ldots, bp^d)$, $p + q = (p^1 + q^1, \ldots, p^d + q^d)$.

對於任意 $g \in F^\infty(0)$，存在 0 的鄰域 U 滿足只要 $p \in U$，則 g 就定義在所有的 bp 點之上，其中 $0 \leq b \leq 1$。換言之，g 定義於整個連接 0 與 p 的線段之上。這時由連鎖法則可得：

$$\frac{d}{ds} g(sp) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{du^i} \frac{du^i(sp)}{ds}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial u^i} p^i,$$

因爲 $u^i(sp) = p^i s$ 。使用微積分的基本定理：

$$h1 = h0 + \int_0^1 \frac{dh}{ds} ds$$

而將其應用於函數 $hs = g(sp)$ ，可得：

$$gp = g0 + \int_0^1 \sum_{i=1}^{d} p^i \frac{\partial g}{\partial u^i}(sp)\, ds$$
$$= g0 + \sum_{i=1}^{d} p^i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(sp)\, ds.$$

當我們定義 $g_i p = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(sp)\, ds$，就已證明在 0 的鄰域滿足：

$$g = g0 + \sum_{i=1}^{d} u^i g_i,$$

現在爲了要證明 $g_i \in F^\infty(0)$，我們必須引用高等微積分裏這樣的定理：假設 $h(p, s)$ 是個 $R^{d+1} = \{(p, s) \mid p \in R^d, s \in R\}$ 上的 C^1 函數，而取 $kp = \int_0^1 h(p, s)\, ds$，則 k 爲 C^1 函數而且滿足：

$$\frac{\partial k}{\partial u^i}(p) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u^i}(p, s)\, ds$$

對於具有形狀爲 $h(p, s) = \frac{\partial^m g}{\partial u^{i_m} \cdots \partial u^{i_1}}(sp)$ 的函數連續使用這定理並注意到連鎖法則立即顯明 g_i 爲 C^∞ 函數。□

我們把 a^i 稱爲切向量 $t = \sum_{i=1}^{d} a^i \partial_i(m)$ 在座標系統 $\{x^i\}$ 中的第 i 個成分。

註 如果我們將 C^k 函數展開成上面的泰勒展式那麼所出現的那些係數函數 f_i 只為 C^{k-1} 函數。這樣可微分性降低一次使我們在定義 C^k 流形上的切向量時不可以使用上面所給的講法，否則由條件(a)及(b)就會出現許多無法將其作用於 C^{k-1} 函數的運算。特別這些運算不能寫成 $\sum_{i=1}^{d} a^i \partial_i(m)$ 的形狀。解決這困難的方法有二：第一，定義切向量就是單單那種能表成 $\sum a^i \partial_i(m)$ 形狀的運算，此即要求切空間以 $\partial_i(m)$ 為其基。第二，也可以就改而要求切向量就是切於 C^k 曲線的切向量。這兩種做法所得的結果都相同，就是我們上面已經得到的：每一個切空間 M_m 都是一個向量空間，其維數正好等於流形 M 的維數 d。在 M_m 中有一組基就是由座標向量場 $\partial_i(m)$ 所組成。

對於 C^∞ 流形現在我們來總結前面各種（等價的）描述切向量的方法：

(a) 首先我們把一個切向量定義成一個實值的在 $F^\infty(m)$ 之上的導運算，此即看成 $t: F^\infty(m) \to R$ 滿足第 1.6 節中的條件(a)與(b)。

(b) 對於在 m 點的任意座標系統 (x^i) 而言，在 m 點的切空間藉用定理 1.7.1 可表為所有具有形狀 $\sum_{i=1}^{d} a^i \partial_i(m)$ 之切向量的集合。

(c) 在 m 點的切空間由所有 C^∞ 曲線之切向量 $\gamma_* c$ 所組成，其中 $\gamma c = m$。這結果是由(b)以及習題 1.7.3 而來。

(d) 對於切向量在古典張量分析中所給的定義（參看定理 1.7.2）基本上就如同(b)中所給的定義。只不過這時特別指明一個切向量對於不同座標系統時其成分 (a^i) 與 (b^j) 之間的轉換規則。從這種觀點來定義的切向量只不過是對於每個座標系統指定一組成分 a^i。因此切向量完全不再被解釋成作用於函數的運算。這種定義方法由於需要顧及不同座標系統中同一向量的成分之間的轉換律，因此真的定義起來會有些煩，可是另方面在實用上卻頗為方便，因為這種定義是 R^d 中把一個有方向的線段看成切向量的最直接的推廣。因此在直覺上最容易加以理解。由於這緣故，我們預期這種古典的定義仍然繼續會被使用很長的一段時間，儘管我們已經有一些更好的定義可用。

假設 (x^i) 及 (y^i) 為兩組座標系統，則由連鎖法則在相應的兩組座標向量場之間存在如下的關係：

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

由定理 1.7.1 我們把切向量 t 分別寫成：

$$t = \sum_{i=1}^{d} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(m) = \sum_{i=1}^{d} b^i \frac{\partial}{\partial y^i}(m),$$

所以立即得出有關切向量的轉換律爲：

$$a^i = \sum_{j=1}^{d} b^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(m). \tag{1.7.1}$$

爲了要建立包含公式 (1.7.1)之古典定義與我們現在定義之間的等價關係。這兒來給出如下的定理。

定理 1.7.2 假設 t 是定義於所有在 m 點之圖表的函數。對於每個在 m 點的圖表（x^i），t 就指定一組 d 個實數。現在假設 $t(x^i) = (a^i)$, $t(y^i) = (b^i)$ 則必定（a^i）與（b^i）之間會存在有公式 (1.7.1)的關係。那麼對於所有這些圖表而言，我們都會有：

$$\sum_{i=1}^{d} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(m) = \sum_{i=1}^{d} b^i \frac{\partial}{d y^i}(m).$$

換言之在古典定義之下的一個切向量就定義了一個我們所定義的切向量。

習題 1.7.4 試證偏導數的符號有可能引起誤解如下例所述：假設 M 之維數大於一，那麼會存在座標系統 x^i 與 y^i，他們的 $x^1 = y^1$ 但是 $\partial/\partial x^1 \neq \partial/\partial y^1$。可見座標向量 $\partial/\partial x^1$ 不單只隨著 x^1 而變化，也隨著其他的座標函數 $x^2, \cdots\cdots, x^d$ 而變化。因此儘管 x^1 保持不變而只改變 $x^2, \cdots\cdots, x^d$，則有可能 $\partial/\partial x^1$ 會隨之而發生變化。可是偏導數的符號 $\partial/\partial x^1$ 卻容易引人誤以爲這個切向量只與 x^1 有關。這一點應該特別注意。

習題 1.7.5 當 $d>1$ 時試證泰勒展式並非唯一。另外也證明存在較高階的類似上面所用形狀的泰勒展式。

1.8 映射之微分映射

取 M 爲流形，將 M 上每一點的切空間全都放在一起而記之爲 TM。等到第三章我們會加給 TM 一個自然的流形結構，使其成爲一個 $2d$ 維的可微流形。其中的局部座標粗略來講是由 M 的一個座標系統 (x^i) 中的 d 個座標，再加上一個切向量對應於座標向量基 $\partial_i(x)$ 之 d 個成分 (component) 所組成。這樣的 TM 叫做 M 的**切束** (tangent bundle)。可是就本章之討論所需，我們只要把 TM 單單看成一個點集就可。

現在假設 $\mu: M\to N$ 是一個 C^∞ 映射。則存在一個誘導的映射 $\mu_*: TM\to TN$，稱爲 μ 的**微分映射** (differential mapping)。μ_* 另外的名稱爲 μ 到 TM 的**拓植** (prolongation)，或者 μ 的**切映射** (tangent map)。我們預備給出兩種定義，然後證明他們其實相同。

(a) 假設 t 落在 TM 中，則當然存在某點 $m\in M$ 使得 $t\in M_m$。另外還存在一條 C^∞ 曲線 γ 使得 $\gamma_*0=t$。現在由 $\gamma: R\to M$ 以及 $\mu: M\to N$ 可見其合成映射 $\mu\circ\gamma: R\to N$ 成爲 N 中的一條 C^∞ 曲線。我們就定義

$$\mu_*t=(\mu\circ\gamma)_*0. \tag{1.8.1}$$

這樣的定義給人一種印象，就是 μ_* 不只與 t 有關，而且也有可能受到所用的曲線 γ 的影響。由於我們即將證明這定義與第二定義等價，所以這兒就不直接來證明 (1.8.1) 式的定義與 γ 之選法無關。

(b) 對於任意的 $t\in TM$，我們只要能夠提供 $\mu_*t\in TN$ 如何作用於 $F^\infty(n)$，那麼我們就已完成了 μ_* 的定義。這兒 $n=\mu m$，而 $t\in M_m$。任取 $f\in F^\infty(n)$，則有 $f\circ\mu\in F^\infty(m)$，因此可定義

$$(\mu_*t)f=t(f\circ\mu). \tag{1.8.2}$$

爲了使這定義眞的可用，顯然我們必須立即證明這個 μ_*t 確實是個在 n 點 N 的切向量。但是由於馬上要證明定義(a)與定義(b)等價，所以 $\mu_*t=(\mu$

$\circ\gamma)_*0$，是個在 $\mu\gamma 0=\mu m=n$ 點的切向量。

現在來證明定義(a)與定義(b)互相等價。使用(a)與(b)中的符號可得：

$$\begin{aligned}
[(\mu\circ\gamma)_*0]f &= \frac{d}{du}(0)[f\circ(\mu\circ\gamma)] \\
&= \frac{d}{du}(0)[(f\circ\mu)\circ\gamma] \\
&= (\gamma_*0)(f\circ\mu) \\
&= t(f\circ\mu).
\end{aligned}$$

因此式子(1.8.1)的右邊作用於 f 所得到的值就等於(1.8.2)式的右邊，可見兩種定義彼此相等。

接下來我們討論 μ_* 的座標表示。假設 x^i，$i=1$，……，d 是在 m 點的局部座標，而 y^α, $\alpha=1,\ldots,e$ 是在 $n=\mu m$ 點的局部座標。則在 m 的鄰域上 μ 具有如下的座標表示：

$$y^\alpha\circ\mu = f^\alpha(x^1,\ldots,x^d).$$

假設 $t\in M_m$，則可以將 t 寫成 $t=\sum_{i=1}^d a^i\,\partial_i(m)$。取 $b^\alpha=(\mu_*t)y^\alpha$，則從定理 1.7.1 可得：

$$\mu_*t = \sum_{\alpha=1}^{d} b^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(n).$$

至於這些 b^α 值則可由(1.8.2)式的定義計算出來。由於 $y^\alpha\in F^\infty(n)$，可得：

$$\begin{aligned}
b^\alpha &= (\mu_*t)y^\alpha \\
&= t(y^\alpha\circ\mu) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a^i\,\partial_i(y^\alpha\circ\mu)(m).
\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

我們可以把所有 a^i 的係數寫成一個 $e\times d$ 的矩陣如下：

$$J=\begin{pmatrix}\partial_1 y^1\circ\mu & \partial_2 y^1\circ\mu & \cdots & \partial_d y^1\circ\mu\\ \vdots & & & \vdots\\ \partial_1 y^e\circ\mu & \cdots & \cdots & \partial_d y^e\circ\mu\end{pmatrix}.$$

這個矩陣就稱爲 μ 對應於座標 x^i 與 y^α 的賈氏矩陣（Jacobian matrix）。因此當我們把 μ_* 寫成像（1.8.3）的表示式時，這式子可以看成通常矩陣理論中一個 $e\times d$ 矩陣 J 乘以一個 $d\times 1$ 的行向量（a^i）而得出一個 $e\times 1$ 的行向量（b^α）。

習題 1.8.1 試證 $\mu_*:M_m\to N_n$ 是個線性的映射。此即對於任意 $s,t\in M_m$ 以及 $a\in R$，我們有：

(a) $\mu_*(s+t)=(\mu_* s)+(\mu_* t)$.
(b) $\mu_*(at)=a\mu_* t$.

習題 1.8.2 假設 $\mu:M\to N$ 及 $\tau:N\to P$ 皆爲 C^∞ 映射，試證如下的關係成立：

$$(\tau\circ\mu)_*=\tau_*\circ\mu_*. \tag{1.8.4}$$

如果將這關係式寫成其座標表示可得（$\tau\circ\mu$）$_*$ 所對應的賈氏矩陣正好是 τ_* 與 μ_* 之賈氏矩陣的乘積，正是一種明顯的連鎖法則。

現在來考慮一些重要的特別情形。第一類的特別情形是當 M 或者 N 爲 R 的時候。因爲這時所牽涉到的重要觀念爲 C^∞ 曲線以及實值函數。在 R 上我們可以取恒等座標 u 做爲其上的自然座標，因此在任意 c 點的切向量可以使用 $d/du(c)$ 做爲自然基。

當 $M=R$ 時，我們所得的是一條曲線 $\gamma:R\to N$。因此要想瞭解 γ_* 的行爲只需知道 γ_* 如何作用於 $\dfrac{d}{du}$（c）就可。因爲所有其他在 c 點的切向量都是這個基向量的實數倍，而另方面由習題 1.8.1 (b)，γ_* 是個線性映射。

在 R 中考慮恒等曲線 $u:R\to R$，則這曲線的切向量爲 d/du。若

$\gamma: R \to N$是條C^∞曲線，由定義（1.8.1）式可得：

$$\gamma_* \frac{d}{du}(c) = (\gamma \circ u)_* c$$
$$= \gamma_* c.$$

而後面的表達式正是我們在1.7節裏對一條曲線γ之切向量所給的定義。可見我們的符號其實前後十分一致。

當$N = R$時我們所得的是一個實值C^∞函數$f: M \to R$。假設$t \in M_m$而$c = fm$，則$f_* t$可以透過如何表成R_c中的基向量$\frac{d}{du}(c)$之線性組合而得確定。根據定理1.7.1我們有：

$$f_* t = a \frac{d}{du}(c),$$

其中的係數a可以由（1.8.2）式加以計算出來：

$$a = (f_* t)u$$
$$= t(u \circ f)$$
$$= tf.$$

因此得證：

$$f_* t = (tf) \frac{d}{du}(c).$$

這樣對於實值函數$f: M \to R$我們可以定義f的微分形（differential）df爲一個函數$df: TM \to R$：$(df)t = tf$。因此df與$f_*: TM \to TR$之間的關係爲：

$$f_* t = ((df)t) \frac{d}{du}(c) \tag{1.8.5}$$

其中$t \in M_m$，$fm = c$。

在每一個切空間M_m之上，$df: M_m \to R$是個線性實值的函數。在第

二章裏對於給定的一個向量空間V我們將考慮其上所有線性的實值函數之集合而稱之爲V的對偶空間 V^* 。使用這種術語一個實值函數f之微分形 df 就對每一點m指定其切空間 M_m 之對偶空間 M_m^* 中的一個元素。如果M是個流形，則通常切空間的對偶空間 M_m^* 稱爲M在m點的餘切空間（cotangent space），或者在m點的微分形空間，或者在m點的順變向量（covariant vectors）空間。

習題 1.8.3 假設x^i是M上的局部座標，$f:M\to R$爲C^∞函數，試證由公式(1.8.5)立即可得古典的微分形公式

$$df = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f\, dx^i$$

習題 1.8.4 試證dx^i，$i=1$，……，d構成一組∂_i，$i=1$，……，d之對偶基。此即滿足條件

$$(dx^i)\,\partial_j = \delta^i_j.$$

請參看第 2.7 節。

習題 1.8.5 令 $\mu: R^2 \to R^2$ 定義爲 $\mu = (x^2+2y^2, 3xy)$。試計算在標準座標之下μ_*在（1，1）點的賈氏方陣。使用這結果並運用矩陣之乘法來計算：

$$\mu_*\left(\frac{\partial}{\partial x}(1,1) + 3\frac{\partial}{\partial y}(1,1)\right)$$

第一章習題提示

1.1.1 (a) $\lim\limits_{h\uparrow 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0$，$\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{fh-f0}{h}=\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}=\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{h}}\cdot h}$

$=0$。可見在原點f可微分，而且$f'0=0$。

當 $x<0$ 時 $f'x=0$，而於 $x>0$ 時 $f'x=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}\cdot x^2}$，因此也有

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f'h-f'0}{h}=0$$

又

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f'h-f'0}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{h}}\cdot h^3}=0$$

所以 $f''0=0$ 可以繼續計算當 $x<0$ 時 $f''x=0$，而於 $x>0$ 時

$$f''x=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}x^4}-\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}x^3}$$

因此證明 $f^{(3)}0=0$ 等等。

1.2.1 在球座標 $x=r\sin\varphi\cos\theta$；$y=r\sin\varphi\sin\theta$；$z=r\cos\varphi$ 之下，其賈氏矩陣之行列式值為 $-r^2\sin\varphi$，因此要把 $r=0$（即原點），以及 φ 為 0 及 π（即 z 軸）去掉。

在圓柱座標之下，其賈氏行列式為 r，因此要把 $r=0$（即 z 軸）去掉。

1.2.5 (c) $\bar{f}$ 之定義域 U 是由 S^1 去掉 x 軸上的單位點。我們現在可以反過來以相似方法定義 g，卻讓其定義域是由 S^1 去掉 x 軸上的負單位點就可以。

1.2.6 取北半球而加入南半球介於南回歸線與赤道的部分做為一個座標鄰域。考慮由這鄰域到切於北極之平面的投射，就是連接南極與這鄰域中之點的連線延長交於北極切面之點。反過來考慮南半球再加入北半球中北迴歸線以下的部分，而用北極來把這鄰域投射到南極的切平面上。

1.2.7 取 U_1 為：

$$\frac{\pi}{6}<u<\frac{11\pi}{6}\quad;\quad\frac{\pi}{6}<v<\frac{11\pi}{6}$$

反過來取 U_2 為：

$$\frac{4\pi}{6}<u<\frac{14\pi}{6}\quad;\quad\frac{7\pi}{6}<v<\frac{17\pi}{6}$$

最後取U_3為：

$$-\frac{\pi}{2}<u<\pi \quad ; \quad -\frac{\pi}{3}<v<\frac{4\pi}{3}$$

則U_1, U_2及U_3 構成整個環面的開遮。在每個鄰域上皆有逆映射存在。

1.2.9 固定一端點，則另一端點可以看成是落在以此固定端點為中心，以L為半徑的球面之上。

1.2.11 這邊界流形本質上為一個圓圈S^1。

1.3.3 使用S^2上的上下，左右，前後六個半球當做圖表集中的開鄰域，則在每個鄰域上，根本F就是一對一的恒等映射，所以自然是C^∞映射。

1.3.4 在每點的局部鄰域上F為可微同胚，因此S^2與RP^2根本可視為相同。所以只需要求G為連續，保證把M中一點的鄰域整個映射到S^2中某點的鄰域，則G與$F\circ G$根本就沒什麼分別，因此若$F\circ G$為C^∞，則當然G亦為C^∞。

取M為一條線段，GM為S^2的兩條線段，一條以北極為端點的零度經線之一小段。另段則為以南極為端點的零度經線的一小段，因此G非為連續。可是在F之下南北極被認同為一點，FGM就是一條通過這點的經線了，而且為C^∞函數。

1.3.5 由於S不具奇異點，按照隱函數定理我們可以把一個座標函數，例如z解出而表為另外兩個座標函數x，y的可微分函數：$z=z(x,y)$。因此包含映射的座標函數可以認為就是把(x,y)映射成$(x,y,z(x,y))$，因此是個C^∞映射。

1.3.6 把z寫成$x+iy$，w寫成$a+ib$，則就流形言M可視為R^4，以(x,y,a,b)為座標。這時$F(z,w)=zw$可以表成：

$$F(x,y,a,b)=(xa-yb)+i(xb+ya)$$

因此F的兩個座標函數都只不過是x，y，a，b的多項式，因此當然是C^∞映射。

1.3.7 可以把S^1記成$e^{i\theta}$，$e^{i\varphi}$，因此上題中的F限制到$S^1\times S^1$來所得到的G就把$(e^{i\theta},e^{i\varphi})$指定到$e^{i(\theta+\varphi)}$。或即就座標言，$G$可表成$G(\theta,\varphi)=\theta+\varphi$，因此是個$C^\infty$映射。

1.3.8 $z=x+iy$，則

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

可見H的兩個座標函數分別爲$x/(x^2+y^2)$以及$y/(x^2+y^2)$。這是C^∞函數。

1.3.10 對於$M\times N$上的任意可微函數f而言

$$(f\circ F)P=f(FP)=f(F^1P,F^2P)$$
$$=f(pFP,qFP)$$

由於pF及qF皆爲可微分，所以$f\circ F$亦爲可微分，因此按定義F爲C^∞映射。

1.4.1 $x=t^2$，$y=t^3$之賈氏矩陣$(2t,3t^2)$在原點$t=0$具有一個奇異性。事實上FR這條曲線在原點具有一個尖點。

1.5.1 取$g(t)=c\int_0^t h(s)ds$就是第1.5節實例(b)中的那個函數，在$t\leq 0$時爲0，而所有各次導數爲零，在$t\geq 1$時爲1，而所有各次導數爲0。定義曲線$f(t)$的兩個座標函數如下：

$$x(t)=a_0+g(t)(a_1-a_0)+g(t-1)(a_2-a_1)$$
$$+g(t-2)(a_3-a_2)+\cdots\cdots+g(t-n)(a_0-a_n)$$
$$y(t)=b_0+g(t)(b_1-b_0)+g(t-1)(b_2-b_1)$$
$$+\cdots\cdots+g(t-n)(b_0-b_n)$$

當$t=0$時$(x(0),y(0))=(a_0,b_0)$；於$0\leq t\leq 1$時$f(t)-f(0)$的斜率爲：

$$\frac{y(t)-b_0}{x(t)-a_0}=\frac{b_1-b_0}{a_1-a_0}$$

因此$f(t)$確實是連接(a_0,b_0)與(a_1,b_1)之直線。當$1\leq t\leq 2$時，$g(t)=1$，$g(t-1)$介於0與1之間，而$g(t-2)=0$。這時$x(t)$及$y(t)$可看成$a_1+g(t-1)(a_2-a_1)$及$b_1+g(t-1)(b_2-b_1)$之形狀，因此$f(t)$就是連接(a_1,b_1)與(a_2,b_2)之直線。而藉著這個$g(t)$我們使得在角落的銜接點不發生問題。

最後定義$f(t)$爲週期性函數，以$n+1$爲一個週期。

1.6.1 加法律沒什麼困難，主要的困難在第二個條件：

$$(\gamma_{**}c)(fg)=\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(f\circ\gamma)(g\circ\gamma)\right)(c)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{df\circ\gamma}{du}g\circ\gamma+(f\circ\gamma)\frac{dg\circ\gamma}{du}\right)(c)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2f\circ\gamma}{du^2}(c)g\circ\gamma(c)+\frac{df\circ\gamma}{du}(c)\frac{dg\circ\gamma}{du}(c)$$

$$+\frac{1}{2}f\circ\gamma(c)\frac{d^2g\circ\gamma}{du^2}(c)$$

$$=(\gamma_{**}c)f\cdot gm+(\gamma_*c)f\cdot(\gamma_*c)g+fm\cdot(\gamma_{**}c)g$$

因此條件二能成立當且唯當 $\gamma_{*}c=0_m$ 。

1.7.1 設 μ 爲在 m 點的圖表，滿足 $\mu m=$ 原點，考慮 $\gamma(\mu)$ 爲曲線

$$(a^1u,a^2u,\cdots\cdots,a^nu)$$

在 μ 之下的逆像，則這曲線在 m 點的切線就等於 t 。

1.7.4 由連鎖法則：

$$\frac{\partial}{\partial y^1}=\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial x^2}+\cdots\cdots+\frac{\partial x^d}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial x^d}$$

若 $y^1=x^1$ ，而 x^2 到 x^d 中間有些是涉及 y^1 的函數，則 $\partial/\partial y^1$ 除了 $\partial/\partial x^1$ 之外就尚有其他項了，因此 $\partial/\partial y^1\neq\partial/\partial x^1$ 。

1.7.5 譬如考慮多項式

$$f(x,y)=5+x+2y+x^2+3xy-y^2$$

則可以在原點附近寫成：

$$f(x,y)=5+x(1+x+3y)+y(2-y)$$

但是同樣也可以寫成：

$$f(x,y)=5+x(1+x)+y(2+3x-y)$$

因此一個函數的泰勒展式當然並非唯一。

1.8.3 $(dx^i)t=tx^i$ ；若 $t=\sum_j a^j\partial_j$ ，則 $tx^i=\sum_j a^j\partial_j x^i=a^i$ 。計算：

$$\left(\sum_i \partial_i f dx^i\right) t = \sum_i \partial_i f\,(dx^i t) = \sum_i (\partial_i f) a^i$$

$$= \sum_i a_i \partial_i f = \left(\sum_i a_i \partial_i\right) f = tf$$

但是 $df(t)$ 也等於 tf，這對任意 t 都成立，而得證：

$$df = \sum_i (\partial_i f)\, dx^i$$

1.8.5 $J = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 3y & 3x \end{pmatrix}$ $\therefore$ $J(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

爲 μ_* 在（1，1）點之賈氏矩陣。因此

$$\mu_*\left(\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= 14\frac{\partial}{\partial x}(3,3) + 12\frac{\partial}{\partial y}(3,3)$$

這是因爲 μ 把（1，1）點映射成（3，3）點。

第二章

張量代數

2.1 向量空間

在第一章裏我們已經看到流形M中一點m處之切空間M_m具有適當的代數結構。在本章我們預備對這種特別的代數結構給予抽象化的仔細研究。但是請記得我們總以流形上的切空間做爲我們主要的範例。

一個R上的向量空間(vector space)**或線性空間**(linear space)V就是一個集合其上具有兩種運算。一種叫做加法$+$，把V中任意兩個元素v與w指定到第三個元素$v+w$。另外一種運算叫做實係數乘法，對於任意$v\in V$以及$a\in R$指定到一個元素$av\in V$。此外V中存在一個特別的零元素$0\in V$使得下列幾條公設對於所有$v, w, x\in V$以及$a, b\in R$全都滿足：

(1) 加法交換律：$v+w=w+v.$

(2) 加法結合律：$(v+w)+x=v+(w+x).$

(3) 零元素之存在性：$v+0=v$

(4) 負元素之存在性：存在$-v$滿足$v+(-v)=0$

(5) $a(v+w)=av+aw.$

(6) $(a+b)v=av+bv.$

(7) $(ab)v=a(bv).$

(8) $1v=v.$

我們把V中的元素稱爲向量，而當做係數使用的實數稱爲無向量(scalars)。這兒我們只使用到R中一般稱爲域(field)的一些性質。因此如果在定義中把實數域替換成複數域或者其他適當的域來做爲係數，我們就可以考慮別種的向量空間。在本章所討論到的一些東西如果換到複係數向量空間來考慮就會變得方便得多。

由公設(2)與(7)，我們不妨去掉括號而把 $(v+w)+x$ 或 $(ab)v$ 直接寫成 $v+w+x$ 或 abv 。嚴格來講，(5)與(6)中的右邊是需要標示括號的，但是我們沿用先乘除後加減的慣用法而將其括號加以省略。另外也定義 $v-w=v+(-w)$ 。

註：我們可以將向量空間中的兩個運算看如函數，而分別為 $+:V\times V\to V$ 以及 $\cdot:R\times V\to V$ 。

我們以後會一再地使用下列幾種有關向量空間的基本性質。至於其證明都是立即便得，因此不予贅述。

(a) 假設 $\bar{0}\in V$ 也滿足 $v+\bar{0}=v$ 對所有 $v\in V$ 都成立，則必定 $\bar{0}=0$ 。此即 V 中只有唯一的零元素，是由條件(3)所唯一決定的。

(b) 對於每一個 $v\in V$ 都有 $0v=0$ 。注意這式左邊的 0 代表實數 0 ，而右邊的 0 代表零向量。

(c) 如果 $v+w=0$ ，則必定 $w=-v$ 。此即每個向量只有唯一的負向量。

(d) 對於所有的 $v,w\in V$ 存在唯一的 $x\in V$ 滿足 $v+x=w$ 。此即 $x=w-v$ 。

(e) 對所有的 $a\in R$ 都有 $a0=0$ 。此式中的 0 都代表零向量。

(f) 如果 $a\in R$ ， $v\in V$ 滿足 $av=0$ ，則必定或者 $a=0\in R$ ，或者 $v=0\in V$ 。

(g) 對於每一個 $v\in V$ ，都有 $(-1)v=-v$ 。

習題 2.1.1 取 $V=R\times R$ 而定義

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$c(a,b)=(ca,b).$$

試證除了(6)以外所有其他公設對於這個 V 全都滿足。請問這結果跟上面性質(b)的證明有什麼關係？

實例 取$V=R^d$而定義

$$(a^1,\ldots,a^d)+(b^1,\ldots,b^d)=(a^1+b^1,\ldots,a^d+b^d),$$
$$c(a^1,\ldots,a^d)=(ca^1,\ldots,ca^d).$$

試證明 R^d 是一個向量空間。特別當 $d=1$ 時看出R在通常的實數加法與乘法之下是一個向量空間。設C爲所有複數的集合，可以將C看如 R^2 ，而通常複數的加法以及實數與複數之相乘就使得C變成一個R上的向量空間。可是如果我們使用複數本身做係數，由於C也是一個域，因此所有向量空間的公設全都自然滿足。因此C也是一個C上的（一維）向量空間。

習題 2.1.2 設M爲C^∞流形，而$F^\infty(M)$是M上所有C^∞函數的集合。試證$F^\infty(M)$是個R上的向量空間。

習題 2.1.3 取V爲R^2中的第一象限（quadrant），此即：

$$V=\{(x,y)\mid x\geq 0\quad 又\quad y\geq 0\}$$

使用前面所給的運算試問V不滿足那幾條公設而使其無法成爲一個向量空間？

習題 2.1.4 取R^+爲正實數之集合。定義R^+中兩元素之「和」爲他們通常的乘積，又定義$\cdot: R\times R^+\to R^+$爲$\cdot(r,p)=p^r$。試證在這兩種運算之下$R^+$是個實向量空間。

假設V與W爲向量空間，在其卡氏乘積$V\times W$上取運算爲：

$$(v,w)+(v',w')=(v+v',w+w'),$$
$$c(v,w)=(cv,cw).$$

立即能證明這個$V\times W$也是一個向量空間，我們特別以$V+W$記之，並稱之爲V及W的**直和**（direct sum）。顯然我們立即可以推廣上面定義而取幾個向量空間的直和。另外所取用的向量空間也不見得一定要相異。

習題 2.1.5 試證前面實例中的 R^d 可以認爲就是 d 個向量空間 R 的直和。

2.2 線性無關之概念

設 V 爲向量空間而 v_1, ……, v_r 爲其中有限個向量的集合。如果存在不全爲零的係數 a^1, ……, a^r 使得 $\sum_{i=1}^r a^i v_i = 0$，則說這組向量彼此**線性相關**（linearly dependent）。取 $\{v_i\}$ 爲一組無窮多個向量，如果其中存在一組有限個向量彼此線性相關，則說 $\{v_i\}$ 彼此線性相關。一組向量如果不是彼此線性相關，則說他們彼此線性無關。

具有形狀如 $\sum_{i=1}^r a^i v_i$ 之和（其中 $v_i \in V$，$a^i \in R$）稱爲向量 v_1, …, v_r 的**線性組合**（linear combination）。如果在線性組合中所有的係數 a^i 皆爲零，則說這是一個**無聊的**（trivial）線性組合。因此一組向量彼此線性相關的充要條件爲在這組向量中存在一個非無聊的等於零向量的線性組合。有關線性相關或線性無關的其他形式的定義可以透過下面定理來看出。

定理 2.2.1 設集合 S 中的向量彼此線性無關，則下面這四種講法都同樣表達這性質而爲等價的敘述：

(a) S 的向量間之線性組合能夠等於零向量的，唯有無聊的線性組合而已。

(b) 假設 $v_i \in S$，則若 $\sum_{i=1}^r a^i v_i = 0$，那麼必定 $a^i = 0, i = 1, \ldots, r$.

(c) 若 $v_i \in S$ 而係數 a^i 不全爲零，則必定 $\sum_{i=1}^r a^i v_i \neq 0$.

(d) 若 $v_i \in S$ 而 a^i 不全爲零，則若 $\sum_{i=1}^r a^i v_i = 0$ 那麼一定會產生矛盾的結果。

定理 2.2.2 集合 S 爲線性相關的充要條件是存在互不相同的向量 v_0, v_1, ……, $v_r \in S$ 使得 v_0 可表爲 v_1, ……, v_r 的線性組合。

證明 假設 S 爲線性相關，則存在 v_0, ……, $v_r \in S$ 以及不全爲零的實數 a^0, ……, a^r 滿足 $\sum_{i=0}^r a^i v_i = 0$。只需適當重新排列，不妨就假設

$a^0 \neq 0$，因此可得 $v_0 = \sum_{i=1}^{r}(-a^i/a^0)v_i$.

反過來如果有不同的 $v_0, v_1, \cdots\cdots, v_r \in S$ 使得 $v_0 = \sum_{i=1}^{r} b^i v_i$，則只需取 $a^0 = 1$，$a^i = -b^i$ 就得到 $\sum_{i=0}^{r} a^i v_i = 0$，其中 a^i 不全爲零。因此 S 爲線性相關。

在特別的情形我們看出兩個向量爲線性相關的充要條件是其中一個爲另外一個的倍數。注意我們這兒並不說每一個都是另一個的倍數，因爲這兩向量中可能有一個向量爲零向量。如果 S 中包含零向量，則不管 S 中其他元素如何，S 總是線性相關的。就 R^3 中的向量而言，兩個向量互相線性相關當且唯當他們互相平行(parallel)。而三個向量彼此線性相關當且唯當這三個向量平行於某個平面。至於 R^3 中隨便四個向量彼此總是線性相關的。

在一個向量空間 V 中線性無關向量之最大數稱爲 V 的維數而以 $\dim_R V$ 記之。當然有可能不存在任何有限數目做爲其線性無關的最大數，這時 V 的維數就說是無窮大，記爲 $\dim_R V = \infty$。這時對於任何一個正整數 n 而言，總可以在 V 中找出一組 n 個線性無關的向量。（注意我們這兒不再去細分到底是可數的無窮大或不可數的更高階的無窮大）。如果一個向量空間可以使用不同的係數域來表達其結構，例如一個複係數的向量空間也可以自然被看成一個實向量空間，則這個向量空間的維數會跟所使用的係數域有關。這時就特別把所考慮的係數域標示出來。

例如我們總會有 $\dim_R V = 2\dim_C V$。但是如果我們一直單只考慮實向量空間，而沒有任何混淆的可能，則我們直接以 $\dim V$ 來記 $\dim_R V$。

習題 2.2.1 假設 V 爲 C 上的向量空間，也爲 R 上的向量空間，又假設 V 中之子集合 S 就複係數 C 而言爲線性無關。試證集合 $S \cup iS$ 必定就實係數 R 而言也爲線性無關。這兒 iS 代表所有可寫成 iv，$v \in S$ 之形狀的元素之集合。因此 $S \cup iS$ 中元素的個數是 S 中元素個數的兩倍。

習題 2.2.2 試證 R^d 的維數至少爲 d。

習題 2.2.3 假設S是V中線性無關的子集合，而T為向量空間W中線性無關的子集合，試證直和$V+W$中的子集合

$$S\times\{0\}\cup\{0\}\times T=\{(v,0)\mid v\in S\}\cup\{(0,w)\mid w\in T\}$$

必定線性無關。因此可見

$$\dim V+W\geq\dim V+\dim W.$$

習題 2.2.4 取F^k為R上所有C^k函數所構成的向量空間。試證所有指數函數的集合$\{e^{\alpha x}\mid\alpha\in R\}$線性無關。就一個零線性組合中所含的項數使用歸納法證明。從一個零線性組合及其導數當中設法消去一項，然後引用歸納法假設。

與維數，或即線性無關向量之最大數的概念密切相關的概念就是極大的線性無關子集合。如果子集合S線性無關，而且如果對於每個$v\notin S$，則必定$S\cup\{v\}$變成線性相關，則說S是V中的一個極大的線性無關子集合，或說S是向量空間V中的一組基。由定理 2.2.2 立即可得：

定理 2.2.3 V中的子集合S是一組基(basis)當且唯當下列兩條件同時滿足：

(a) S為線性無關。

(b) V中的每一個元素都可以表成S中元素的線性組合。

註：在隨便一個向量空間中必定存在一組基。若V為有限維空間這事十分顯然，可是如果V的維數為無窮大，那麼要想證明基的存在性就得使用超級歸納法(transfinite induction)才辦得到。

定理 2.2.4 若S為一組基。若不計其前後秩序則任何V中元素v寫成S中元素之線性組合的表示方法是唯一的。

證明 假設 $v \in V$ 有兩種表示法，則牽涉在這兩種線性組合的 S 中的元素全部只能有限個，設爲 v_1 ，……，v_k 。因此可以將他們分別寫爲：

$$v = \sum_{i=1}^{k} a^i v_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{k} b^i v_i.$$

這樣就有：

$$v - v = 0 = \sum_{i=1}^{k} (a^i - b^i) v_i.$$

但是 S 是線性無關的，根據定理 2.2.1 (b)立即得出 $a^i - b^i = 0$ ，$i = 1$，……，k ，而得證所有的 $a^i = b^i$ ，正如所求。□

取 S 爲 V 中的一組基，則對 V 中的每一個元素 v 存在唯一的一組係數 a^i 而把 v 表成爲 S 中元素的線性組合。這組唯一的係數就稱爲向量 v 對於基 S 的成分（components）。我們說 v 對 S 中的每一個元素指定了其成分，可是這些成分中只有有限個非爲零。

註：在向量空間中我們只定義了有限項的線性組合。因爲在向量空間中我們並沒有給出極限或收斂性（convergence ）的定義。如果在一個向量空間中我們另外還能引進極限的觀念並滿足適當的一些額外的性質，則這種空間稱爲拓樸向量空間。如果這些額外的拓樸向量空間結構是由某個具有正定性（positive definite）的內積運算（inner product）誘導而來，那麼這樣的拓樸向量空間叫做 Hilbert 空間。在本章裏我們不預備從拓樸的觀點來考慮向量空間，儘管對於有限維的向量空間而言其上之拓樸結構是唯一的。

習題 2.2.5 試證 V 中的子集合 S 是一組基的充要條件是 V 中的每個元素皆可以唯一的表示成 S 中的元素之線性組合。

定理 2.2.5 假設 S 爲線性無關的子集合而 T 爲 V 中之一組基，則存在 T

中的一個子集合U使得$S\cup U$構成一組基。

證明 我們只就 $\dim V$ 爲有限時來證明這定理。如果T中的每一個元素都可寫成S中元素的線性組合，則V中的任意元素都可表成T中元素的線性組合，因此可表成S中元素的線性組合，而知S已爲V之一組基。現在如果反過來T中存在某個元素 v_1 不能表成S中元素之線性組合，則集合$S_1=S\cup\{v_1\}$ 是一個比S更大的線性無關的集合。現在假設T中還存在某個元素不能表成 S_1 中元素的線性組合，則可以按上法逐次擴充 S_1 一直到經過有限次後得到一個集合：$S_k = S\cup\{v_1,\ldots,v_k\}$。這時$T$中所有元素已都能表爲$S_k$中元素的線性組合，所以$S_k$就構成$V$的一組基。□

注意這兒所得到的集合U並不見得唯一。

定理 2.2.6 V中所有基之中元素的個數皆相同，就是V的維數。

證明 我們仍然只限於證明 $\dim V$ 爲有限之時的情形。假設S及T爲基，其中元素的個數分別爲k個與d個。而假設$k<d=\dim V$。令$T=\{t_1,\ldots,t_d\}$，則$T_1=\{t_2,\ldots,t_d\}$並非一組基，因此存在S中的元素 s_1 使得$\{s_1,t_2,\ldots,t_d\}$構成一組基。這時$\{s_1,t_3,\ldots,t_d\}$就不是基，因此存在$s_2\in S$ $\{s_1,s_2,t_3,\ldots,t_d\}$ 構成一組基。繼續這作法當我們把S全都用光以後仍還有某些T中的元素存在。因此得到 $S\cup\{t_{k+1},\ldots,t_d\}$ 是一組基。可是這結果與S本身爲一組基的假設相矛盾，因爲含有S以及另外元素的集合必定不可能線性無關。□

習題 2.2.6 在上面證明中爲什麼只需從S中拿出一個元素來補入 T_1 中就立刻得出一組基？另外爲什麼在證明的每個步驟從S拿出來的元素一定都是不同的元素？

習題 2.2.7 試證 $\dim V+W=\dim V+\dim W.$

習題 2.2.8 試證 $\dim R^d = d$。

實例 設 m 爲 d 維 C^∞ 流形中的一點，而 x^1，……，x^d 是在 m 點的局部座標。由定理 1.7.1 知道在 m 點的切向量可以唯一的表示成 $\partial_i(m)$ 的線性組合。因此可見 $\partial_i(m)$ 構成切空間 M_m 裏的一組基。特別知道 M 的所有切空間的維數全都等於 d，就是 M 的維數。

2.3 取和的慣用法

現在應該已是引進愛因斯坦取和慣用法的時候了。使用這種慣用法能省去許多麻煩的符號。我們以後要直接以 $a^i e_i$ 來代表 $\sum_{i=1}^d a^i e_i$。凡是同一指標在上下角同時出現時就表示這是關於此指標取和。通常用以代表取和的指標爲從 h 到 v 的任意字母，其中把 0 去掉。至於取和的範圍則是所考慮基本向量空間或流形之維數。

使用取和慣用法會使得有關偏導數的連鎖法則看來有點像單一變數時的樣子，其中好像分子分母彼此消去。就像在公式：

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

中看似 ∂y^j 彼此抵消一般。另外使用取和慣用法有時會使原來很簡單的一些東西變得很難加以表達。例如我們如果想表示 $a^i e_i$ 這個和中隨便單獨的一項，我們就必須加以註明說我們所要的是 $a^i e_i$(但 i 不取和)。或者我們預先指定某些指標 A，B 等等代表不取和的指標，然後寫 $a^A e_A$。

取和慣用法在正常使用時一個取和的指標在每項中頂多只出現兩次。因此要是在同一項中某指標出現三次以上，那麼大概必定是在什麼地方含有錯誤。這一類型的錯誤常發生於進行公式的代換時，由於沒有詳細計算並適當更換指標而致發生指標重覆使用的情形。有時候我們必須適當的使用分配律來使一個公式眞正符合取和慣用法的形式。例如在 $a^i(e_i+f_i)$ 中出現了三個同樣的指標，但是其意義其實應該是 $a^i e_i + a^i f_i$。大概只要不太複雜而使得意義混亂掉了，這種類型的誤用通常是無所謂的。

現在藉著考慮 d 維向量空間中兩組基之間的關係來示範上面取和慣用法的做法及好處。假設 $\{e_i\}$ 及 $\{f_i\}$ 爲 V 中的兩組基。則每個 e_i 可表爲全部 f_j 的線性組合；反過來每個 f_i 也照樣可以表成 e_j 們的線性組合，而有

$$e_i = a_i^j f_j,$$
$$f_i = b_i^j e_j.$$

習慣上我們把這兒 d^2 個係數安排成一個方陣，其中以第 i 行來寫出 e_i 的 d 個係數，而得方陣：

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_d^1 \\ \vdots & & & \\ a_1^d & a_2^d & \cdots & a_d^d \end{pmatrix}.$$

這方陣稱爲從基 $\{f_j\}$ 變成基 $\{e_i\}$ 的轉換矩陣。因此我們可以將 e_i，f_i 看如 $1\times d$ 的列矩陣而寫成 $e_i = f_j a_i^j$。但是習慣上又都把係數擺在前頭，所以有 $e_i = a_i^j f_j$。

把 $f_j = b_j^k e_k$ 代入 $e_i = a_i^j f_j$ 之中可得

$$e_i = a_i^j b_j^k e_k.$$

但是另方面顯然有 $e_i = \delta_i^k e_k$。任何向量表成基 $\{e_i\}$ 的線性組合時其成分是唯一的，因此可得：

$$a_i^j b_j^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & 若\ i \neq k, \\ 1 & 若\ i = k. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

同樣調換 e_i 與 f_i 的角色可得：

$$b_i^j a_j^k = \delta_i^k. \tag{2.3.2}$$

當兩個方陣 (a_i^j) 與 (b_i^j) 由公式 (2.3.1) 及 (2.3.2) 相連繫起來。則說這兩方陣互爲對方的逆方陣。因此我們已經證明。

定理 2.3.1 兩組基之間轉換的方陣 (a_i^j) 與 (b_i^j) 彼此互為逆方陣。

現在假設我們有兩個 $d \times d$ 的方陣 (a_i^j) 與 (b_i^j) 滿足上兩關係式中的一個，例如滿足 (2.3.1) 式。取 $\{e_i\}$ 為 V 中的任意一組基。其中 V 是個 d 維的向量空間。定義 d 個向量 f_i 為：

$$f_i = b_i^j e_j$$

則由 (2.3.1) 式：

$$a_k^i f_i = a_k^i b_i^j e_j = \delta_k^j e_j = e_k.$$

此即每個 e_i 都可以表示成這 d 個 f_i 的線性組合。可是任意 $v \in V$ 都能用 e_i 寫出，因此任何 v 也都可用 f_i 來寫出。因此在這些 f_i 中包含有 V 的一組基。可是他們的個數只有 d 個，所以這些 f_i 本身就構成一組基。所以 (a_i^j) 及 (b_i^j) 就是 $\{e_i\}$ 與 $\{f_i\}$ 這兩組基之間的轉換方陣。這使得關係式 (2.3.2) 不得不照樣也成立。這就證明了下面有趣的單單涉及方形矩陣的定理：

定理 2.3.2 假設對於 (a_i^j) 這個 $d \times d$ 的方陣存在另個 $d \times d$ 方陣 (b_i^j) 滿足 $a_i^j b_j^k = \delta_i^k$，則這兩個方陣互相為逆方陣，此即另一關係式 $b_i^j a_j^k = \delta_i^k$ 也照樣滿足。

習題 2.3.1 試計算 $\delta_i^k \delta_k^i$。

習題 2.3.2 試證一個向量 v 對兩組基的成分 $\{x^i\}$ 與 $\{y^i\}$ 之間的關係式正好是兩組基之間的關係式之逆。如果 $v = x^i e_i$，$v = y^j f_j$，則有 $x^i = b_j^i y^j$，$y^i = a_j^i x^j$。因此就矩陣理論而觀之，應該把 x^i，y^i 等解釋成 $d \times 1$ 的行向量。

習題 2.3.3 假設 V 是個 d 維的向量空間。試證 V 中的子集合 S 為一組基的充要條件為：(a) V 中每個向量 v 皆為 S 中元素之線性組合；(b) S 中的元

素正好是 d 個。

2.4 子空間

向量空間 V 的一個非空子集 W 如果在 V 的加法與係數乘法運算之下具有封閉性，此即：對於每個 $w, x \in W$ 以及 $a \in R$ 都有 $w+x \in W$ 以及 $aw \in W$，則說 W 是 V 中的子空間。

習題 2.4.1 設 $W \subset V$ 爲子空間。只需將 V 中的運算都限制到 W 中來考慮則立即能證明 W 也是一個向量空間。

在習題 2.1.4 裏我們已經見識過 R 中有一個子集合 R^+，在其上可以適當的引入某些運算而使 R^+ 變成一個向量空間。然而 R^+ 卻不是 R 的子空間，因爲在 R 的運算之下不具有封閉性。因此我們必須特別注意可能存在某些運算能把某個子集合弄成一個向量空間，但是卻不見得使此子集合成爲原來空間的子空間。讀者能容易證明 R 中的子空間只有兩個，或者是 R 本身，或者是單單包含零向量的集合 $\{0\}$。下面這一串定理都是十分容易證明的。

定理 2.4.1 隨便一些子空間的交集仍然是個子空間。

定理 2.4.2 假設 W 是 V 之子空間而 E 爲 W 中之子集合。將 E 認爲是空間 W 之子集合時若是線性無關，則將 E 認爲是 V 之子集合時必定也是線性無關。反之亦然。

定理 2.4.3 假設 W 是 V 的子空間，則 V 中存在一組基其形狀爲 $E \cup F$，其中 E 爲 W 中的一組基。

證明　取 W 之一組基 E，然後使用定理 2.2.5 就可。

定理 2.4.4 假設 W 是 V 的子空間，則 $\dim W \leq \dim V$。

定理 2.4.5　假設S是向量空間V的任意子集合。則V中存在唯一的子空間W滿足下列兩條件：(1) $S\subset W$；(2) W被包含於V中任何包含S的子空間中。因此定理中這個W其實可取為V中所有包含S的子空間的交集。W稱為由S所張開而成的子空間。

特別考慮子集合E是V中的一組基，則E所張開(span)的子空間就是V本身。使用這種術語我們可以把第2.2節裏的許多定理寫得更為簡潔。

習題 2.4.2　假設W是V的子空間，則存在V中的另一個子空間X使得基本上V可以寫成$W+X$，而為這兩個子空間的直和。因此V中的每個元素v都可以唯一的表示成：$v=w+x$的形狀，其中$w\in W$，$x\in X$。除非$W=V$或者$W=\{0\}$，否則一般而言，定理中這個餘空間X並非唯一。

在R^3中可以按維數把所有的子空間都列舉出來。零維的子空間就是$\{0\}$，一維的子空間就是通過原點0的所有直線。二維的子空間就是通過原點的所有平面，而三維的子空間就是R^3本身。

假設W及X是V中的子空間，我們可以考慮子集合：$W\cup X$所張開的子空間，而稱之為W與X之和，仍記為：$W+X$。請參看習題2.4.3。雖然我們使用同一符號，可是和是比直和更為一般的概念。兩空間之和$W+X$為直和當且唯當$W\cap X=\{0\}$。另外我們這兒所談的直和也跟前面所定義的直和有一點小差別。在這兒W，X以及$W+X$都是落在一個給定的向量空間之中，因此W與X的元素間早已存在運算。可是在以前只是給定向量空間W及X，我們必須在卡氏乘積$W\times X$上指定新的向量空間結構才能構造出其直和來。如果在現在新的意義下所考慮的和為直和，則只要藉著對應$(w,x)\leftrightarrow w+x$我們就能把直和的新舊兩種意義相互認同。

關於子空間之和有許多基本性質，我們將其列入下列一大串的習題之中。

習題 2.4.3　試證明$W+X=\{w+x \mid w\in W,\ x\in X\}$。$W+X$中的元素$z$能唯一的分解成$z=w+x$當且唯當此和是直和。

習題 2.4.4 能在V中選定一組基 $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ，其中 E_i 互不相交，而且E_0是$W \cap X$的一組基。$E_0 \cup E_1$是W的一組基，$E_0 \cup E_2$是X的一組基，又$E_0 \cup E_1 \cup E_2$是$W+X$的一組基。

習題 2.4.5 假設 $\dim(W+X)$ 爲有限。則有：

$$\dim(W + X) + \dim(W \cap X) = \dim W + \dim X.$$

2.5 線性映射

設V及W爲向量空間而考慮映射$f:V \to W$滿足如下性質。對於所有$v_1, v_2 \in V$以及$a \in R$都有：

(a) $f(v_1 + v_2) = fv_1 + fv_2$.
(b) $f(av_1) = afv_1$.

這樣的映射稱爲線性映射或線性函數或線性轉換。這時如果f特別是一對一的蓋射，則說f是V到W的同構映射（isomorphism）。這兒同構意指V與W的向量空間結構與性質完全相同。如果V與W之間存在同構映射，則說V與W互相同構，以$V \simeq W$記之。

習題 2.5.1 在線性映射$f:V \to W$之下，V中的零向量被映射成W中的零向量。

習題 2.5.2 如果$f:V \to W$是個同構映射，則有：

$$\dim V = \dim W.$$

如果$f:V \to W$是個線性映射，則$fV \subset W$是個子空間，稱爲f之影像空間，而$f^{-1}\{0\} \subset V$也是個子空間，稱爲f的零空間或零核（null space）。

習題 2.5.3 試證 f 的影像空間及零核皆為子空間。

習題 2.5.4 線性映射 $f: V \to W$ 是個嵌射之充要條件為 $f^{-1}\{0\} = \{0\}$。

定理 2.5.1 假設 $f: V \to W$ 是個線性映射，則有：

$$dim\ V = dim\ fV + dim\ f^{-1}\{0\}.$$

證明　在子空間 $f^{-1}\{0\}$ 裏選定一組基 E，然後將 E 擴充成 V 中的一組基 $E_2 = E \cup E_1$。我們將證明 f 在 E_1 上為嵌射，而且 fE_1 是 fV 中的一組基。首先，如果 $e_1, e_2 \in E_1$ 而滿足 $fe_1 = fe_2$，則由計算：

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_2) &= f(e_1 + [-e_2]) \\ &= fe_1 + f(-e_2) \\ &= fe_1 + f[(-1)e_2] \\ &= fe_1 + (-1)fe_2 \\ &= fe_1 - fe_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $e_1 - e_2 \in f^{-1}\{0\}$。換言之，$e_1 - e_2$ 應該是 E 中元素的線性組合，這就與 E_2 應該具有線性無關的性質相矛盾。

其次如果 $w \in fV$，則存在 $v \in V$ 滿足 $w = fv$。使用 E_2 這組基可以將 v 寫成

$$v = \sum_i a_i e_i + \sum_j b_j \bar{e}_j,$$

其中 $e_i \in E$，$\bar{e}_j \in E_1$。這時由於 f 為線性映射可得：

$$\begin{aligned} fv &= \sum_i a_i fe_i + \sum_j b_j f\bar{e}_j \\ &= 0 + \sum_j b_j f\bar{e}_j; \end{aligned}$$

可見 fv 是 fE_1 裏頭之元素的線性組合，因此 fE_1 張開 fV。

可是另方面假設 $\sum_j b_j f\bar{e}_j = 0$，則有 $f(\sum_j b_j \bar{e}_j) = 0$，因此 $\sum_j b_j \bar{e}_j \in f^{-1}$

{0}，這就使得 $\sum_j b_j\bar{e}_j$ 必須表成E中元素的線性組合：

$$\sum_j b_j\bar{e}_j = \sum_i a_i e_i,$$

或即：

$$\sum_i (-a_i)e_i + \sum_j b_j\bar{e}_j = 0.$$

由於E_2是線性無關的，所有這些係數都應該等於零，因此特別有 $b_j = 0$ 對所有的 j 都成立。而知 fE_1 是線性無關的。

這樣就證明了：

$$\begin{aligned}\dim V &= E_2\text{中元素的個數}N(E_2)\\ &= N(E) + N(E_1)\\ &= \dim f^{-1}\{0\} + \dim fV.\end{aligned}$$

注意本定理的敍述與證明只要適當解釋則於V之維數爲無窮大時都照樣成立。□

系 假設 $\dim V = \dim W < \infty$，則下列三條件彼此等價：

(a) $f: V \to W$是個同構映射。

(b) f 爲一個蓋射。

(c) f 爲一個嵌射。

定理 2.5.2 一個線性映射可以由其在一組基上的值完全唯一的決定。

證明 假設$f: V \to W$爲線性映射而$\{e_i\}$爲V中之一組基。對於任意V中的元素v，存在一個唯一的座標表示 $v = a^i e_i$，因此由於 f 爲線性可得：

$$\begin{aligned}fv &= f(a^i e_i)\\ &= a^i f e_i.\end{aligned}$$

換言之只要fe_i的値給定了，fv之値就完全確定。或即假設$g: V \to W$爲線性映射滿足$ge_i = fe_i$，則必定$gv = fv$對所有V中之元素v皆成立，因此$g = f$。

另方面隨便在W中取出一組向量w_i來，他們可能線性相關，可能有些爲零，可能有些彼此相等都無所謂。我們如果指定$fe_i = w_i$，而定義

$$\begin{aligned} fv &= f(a^i e_i) \\ &= a^i w_i \end{aligned}$$

則這個f是個從V到W的線性函數，因爲：

$$\begin{aligned} f(v + \bar{v}) &= f(a^i e_i + \bar{a}^i e_i) \\ &= (a^i + \bar{a}^i) w_i \\ &= fv + f\bar{v}, \\ f(av) &= f(aa^i e_i) \\ &= aa^i w_i \\ &= afv. \quad \square \end{aligned}$$

習題 2.5.5 假設$\dim V = \dim W$，則必定V與W爲同構。

註：在習題 2.5.5 中所要求的同構映射其實有非常多個，隨著V與W中基的選擇與安排可以得出許多不同的同構映射來。有時候我們會要求所選用的同構映射滿足進一步的某些條件。這樣或許就能唯一的決定一個特別的同構映射。譬如說在第 2.9 節裏我們要提到一個有限維的向量空間與其第二次對偶空間V^{**}。這時我們可以從衆多的同構映射當中挑選出一個特別自然的同構映射來，而稱之爲V與V^{**}之間的**自然同構映射**（natural isomorphism）。

2.6 線性映射之空間

所有從V到W的線性映射之集合全體構成一個向量空間，而記爲$L(V, W)$。其中的運算就定義爲

$$(f+g)v = fv + gv \quad f, g \in L(V, W), \; v \in V$$
$$(af)v = a(fv) \quad f \in L(V, W), \; a \in R, \; v \in V$$

立即能證明 $f+g$ 及 af 仍然都是線性映射，而且在這兩種運算之下 $L(V, W)$ 確實滿足向量空間的所有公設。

設 W 與 V 皆爲有限維，其維數分別爲：

$$\dim W = d_1 \;, \; \dim V = d_2$$

取 V 中的一組基 $\{e_i\}$，以及 W 中的一組基 $\{\bar{e}_\alpha\}$。因此指標 α 的變動範圍是從 1 到 d_1，而指標 i 的變動範圍是從 1 到 d_2。現在考慮線性映射 $f: V \to W$。首先可以將每個 fe_i 寫成其座標表示：

$$fe_i = a_i^\alpha \bar{e}_\alpha. \tag{2.6.1}$$

根據定理2.5.2 f 可以完全由其 fe_i 這些值來決定，因此 f 就完全由矩陣 (a_i^α) 以及基 $\{e_i\}$，$\{\bar{e}_\alpha\}$ 得到決定。其中這些 (2.6.1)式中 fe_i 的係數被安排成第 i 個行向量而寫成一個 $d_1 \times d_2$ 的矩陣：

$$(a_i^\alpha) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & & a_{d_2}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_{d_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{d_1} & a_2^{d_1} & & a_{d_2}^{d_1} \end{pmatrix}$$

這矩陣稱爲 f 對應於基 $\{e_i\}$ 及 $\{\bar{e}_\alpha\}$ 所表示成的矩陣，或即在基 $\{e_i\}$ 及 $\{\bar{e}_\alpha\}$ 之下 f 的矩陣表示或座標表示。其中最後一個名稱的意思就是如同一個向量對應於一組基時，其成分被稱爲這向量的座標，同樣對應於兩組基時 f 所表示成的矩陣也看如標示這個線性映射的座標。因此在 V 及 W 中選定基就即時將 V，W 以及 $L(V, W)$ 座標化了。其座標分別是從 V，W, $L(V, W)$ 到 R^{d_2}，R^{d_1} 以及所有 $d_1 \times d_2$ 矩陣之集合的嵌射，又同時也是蓋射。前面的兩個座標化映射是向量空間之間的同構映射。因此很自然的我們也可以試著在這些 $d_1 \times d_2$ 矩陣的集合中引入向量空間的結構而

使得第三個座標化映射也是關於向量空間的同構映射。很容易看出所要的定義爲：

$$(a_i^\alpha) + (b_i^\alpha) = (a_i^\alpha + b_i^\alpha), \tag{2.6.2}$$
$$a(a_i^\alpha) = (aa_i^\alpha). \tag{2.6.3}$$

註：在第 2.3 節中我們曾處理過方形的矩陣用以表達一個向量空間裏基的變動。但是現在所處理的矩陣其用法卻大爲不同，不僅它不見得是方形矩陣，就算當 $\dim V = \dim W$ 而得到方形矩陣時，仍與以前所用的方陣其代表意義不太一樣。按照慣常的用法，我們常把 f 與經座標化的矩陣（a_i^α）混用，因此在第 2.3 節一個方陣是代表一個座標變化（基的變化），可是在這兒一個矩陣卻代表一個線性映射。類似的混用也常就把一個向量的座標當做就是這個向量。

接下來我們試用線性映射的矩陣表示以及所涉及向量的成分來描述這個線性映射。因此假設 $v \in V$ 的成分可寫成：$v = v^i e_i$，我們要設法計算出 $w = fv = w^\alpha \bar{e}_\alpha$ 的這些成分。由（2.6.1）式立即可得：

$$\begin{aligned} f(v^i e_i) &= v^i f e_i \\ &= v^i a_i^\alpha \bar{e}_\alpha \\ &= w^\alpha \bar{e}_\alpha. \end{aligned}$$

再使用 $\bar{e}_\alpha$ 爲線性無關的一組基，因此立即有：

$$w^\alpha = a_i^\alpha v^i. \tag{2.6.4}$$

這些公式就被拿來當做一個 $d_1 \times d_2$ 矩陣 $A = (a_i^\alpha)$ 與一個 $d_2 \times 1$ 行向量 $\bar{v} = (v^i)$ 之乘積的定義以得出一個 $d_1 \times 1$ 行向量 $\bar{w} = (w^\alpha)$，而簡單寫成：

$$\bar{w} = A\bar{v}. \tag{2.6.5}$$

如果以 $E: V \to R^{d_2}: v \to \bar{v}$ 以及 $\bar{E}: W \to R^{d_1}: w \to \bar{w}$ 分別表示座標化的同構映射，則存在於 f 與 A 之間的關係可以方便的使用如下可交換的圖

式(commutative diagram)來表明：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{E}} \\ R^{d_2} & \xrightarrow{A} & R^{d_1} \end{array}$$

其中所謂可交換的意思就是兩種路徑的映射得出同一結果：

$$\bar{E} \circ f = A \circ E. \tag{2.6.6}$$

但是我們知道E及$\bar{E}$都是同構映射，因此都具有逆映射。我們可以將公式(2.6.6)分別就f或A解出而得到與定理2.5.2同樣的結果：

$$f = \bar{E}^{-1} \circ A \circ E, \tag{2.6.7}$$
$$A = \bar{E} \circ f \circ E^{-1}. \tag{2.6.8}$$

由於線性映射的矩陣表示由$d_1 d_2$個係數組成，而這些數目反過來完全決定一個線性映射，因此可以預期向量空間$L(V, W)$的維數應該就是這個數目，此即：

定理2.6.1 (a) 假設$\dim V = d_2$，$\dim W = d_1$則$\dim L(V, W) = d_1 d_2$。

(b) 假設$\{e_i\}$是V之基而$\{\bar{e}_\alpha\}$爲W之基，則$L(V, W)$具有如下的一組基$\{E^j_\beta\}$，其中E^j_β是藉著下式所定義的線性函數：

$$E^j_\beta e_i = \delta^j_i \bar{e}_\beta. \quad i = 1, \cdots\cdots, d_2$$

(c) 假設(f^α_i)是$f \in L(V, W)$的矩陣表示，則當$L(V, W)$中採用(b)中之$\{E^j_\beta\}$爲基時f可以寫成：

$$f = f^\alpha_i E^i_\alpha.$$

證明 首先E^j_β爲線性無關。因爲若有$a^\beta_j E^j_\beta = 0$，則有

$$a^\beta_j E^j_\beta e_i = a^\beta_j \delta^j_i \bar{e}_\beta = a^\beta_i \bar{e}_\beta = 0,$$

因此由 $\bar{e}_\alpha$ 之線性無關的性質可得對於所有 $\alpha = 1$，……，d，以及 $i = 1$，……，d，都有 $a_i^\alpha = 0$ 。

現在由 (f_i^α) 之定義：$fe_i = f_i^\alpha \bar{e}_\alpha$ ，而另方面

$$f_j^\alpha E_\alpha^j e_i = f_j^\alpha \delta_i^j \bar{e}_\alpha$$
$$= f_i^\alpha \bar{e}_\alpha,$$

可見 $f = f_i^\alpha E_\alpha^i$ 。所以任何 $L(V, W)$ 中之元素皆可表爲 E_β^j 的線性組合，而得證 E_β^j 爲一組基。□

習題 2.6.1 試證 E_β^j 之對應矩陣表示爲 $(\delta_i^j \delta_\beta^\alpha)$.

假設 V，W 及 X 爲向量空間，而 $\{e_i\}$，$\{f_\alpha\}$ 及 $\{g_A\}$ 分別爲其中之基。又設 $F: V \to W$ 及 $G: W \to X$ 爲線性映射而：

$$Fe_i = F_i^\alpha f_\alpha, \quad Gf_\alpha = G_\alpha^A g_A,$$

則有：

$$(G \circ F)e_i = G(F_i^\alpha f_\alpha)$$
$$= F_i^\alpha G(f_\alpha)$$
$$= G_\alpha^A F_i^\alpha g_A.$$

因此合成映射 $G \circ F$ 之矩陣表示就是 G 與 F 之個別矩陣表示的乘積：

$$(G_\alpha^A)(F_i^\beta) = (G_\alpha^A F_i^\alpha).$$

定理 2.6.2 矩陣的乘法運算滿足結合律：此即若矩陣 A，B，C 之間 $A(BC)$ 存在，則必定 $A(BC) = (AB)C$ 。

證明 使 A，B，C 分別對應於線性映射 F，G，H，則 $A(BC)$ 對應於 $F \circ (G \circ H)$，而 $(AB)C$ 對應於 $(F \circ G) \circ H$。但是就任意線性映射而言 $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$，因此相應的矩陣結合律自應成立。□

定理 2.6.3 (a) 假設$F, G: V\to W$，$H: W\to X$皆爲線性映射，而A，B，C分別爲所對應的矩陣表示，則有

$$\begin{aligned} H\circ(F+G) &= H\circ F + H\circ G,\\ C(A+B) &= CA+CB. \end{aligned}$$

(b) 同樣，對於線性映射$F: V\to W$，$G, H: W\to X$以及他們所對應的矩陣表示A，B，C，我們也有

$$\begin{aligned} (G+H)\circ F &= G\circ F + H\circ F,\\ (C+B)A &= CA+BA. \end{aligned}$$

證明

$$\begin{aligned} H\circ(F+G)v &= H(Fv+Gv)\\ &= HFv+HGv\\ &= (H\circ F+H\circ G)v. \quad \square \end{aligned}$$

2.7 對偶空間

向量空間$L(V, R)$稱爲V的對偶空間，而記之爲V^*。

定理 2.7.1 假設$\dim V<\infty$，則有$\dim V^*=\dim V$。

證明 由定理 2.6.1 立即可得。□

要注意的是當$\dim V=\infty$時，如果我們對各等級的無窮大給予通常的解釋，則能證明$\dim V^*>\dim V$。這時我們可以從V的一組基建立一個一對一的對應關係到V^*之一組基中的某一子集。可是反過來卻無法建立從V^*之一組基到V之一組基（或其中的某子集）的一對一的對應關係。我們在下面大抵都假設V爲有限維，除非特別做另外的聲明。

R中有一個自然基就是數目 1。因此根據定理 2.6.1，對於V中的每

一組基 $\{e_i\}$，存在 V^* 中一組特別的基 $\{\varepsilon^i\}$ 滿足：

$$\varepsilon^i e_j = \delta^i_j. \tag{2.7.1}$$

由公式 (2.7.1) 所定義的這些線性映射 $\varepsilon^i: V \to R$ 就稱爲 $\{e_i\}$ 的對偶基。

現在假設 $\{f_i\}$ 是 V 中的另一組基，而 $\{\varphi^i\}$ 爲其對偶基。則由對偶基的定義有：

$$\varphi^i f_j = \delta^i_j. \tag{2.7.2}$$

現在 f_i 可以藉著一個方陣 (a^j_i) 來表成 e_i 的組合，同樣 e_i 可以藉著逆方陣 (b^j_i) 來表成 f_i 的線性組合：

$$f_i = a^j_i e_j, \tag{2.7.3}$$

$$e_i = b^j_i f_j. \tag{2.7.4}$$

因此可計算出：

$$\begin{aligned}
\varepsilon^i f_j &= \varepsilon^i a^k_j e_k \\
&= a^k_j \delta^i_k \\
&= a^i_j \\
(a^i_k \varphi^k) f_j &= a^i_k \delta^k_j \\
&= a^i_j.
\end{aligned}$$

既然在基 f_j 之上 ε^i 與 $a^i_k \varphi^k$ 之值皆相同，可見：

$$\varepsilon^i = a^i_k \varphi^k. \tag{2.7.5}$$

因此我們照樣也有：

$$\varphi^i = b^i_k \varepsilon^k. \tag{2.7.6}$$

我們可以把公式 (2.7.3) 到 (2.7.6) 綜合而寫成如下的：

定理 2.7.2 對偶基間的轉換方陣正好是原來兩個基間轉換方陣之逆方陣。可是這兒的取和一者是就列來考慮，另一種是就行來做。

2.8 多重線性映射

取V_1,V_2及W爲向量空間。而考慮映射$f:V_1\times V_2\to W$,如果f就每一個變數而言皆爲線性,此即對任意元素都有:

$$f(av_1 + \bar{a}\bar{v}_1, v_2) = af(v_1, v_2) + \bar{a}f(\bar{v}_1, v_2),$$
$$f(v_1, av_2 + \bar{a}\bar{v}_2) = af(v_1, v_2) + \bar{a}f(v_1, \bar{v}_2).$$

則說f是個雙線性的(bilinear)映射。這種定義可以立即被推廣到更多變數的映射或函數而得出多重線性映射的定義。如果變數正好有r個,我們就稱之爲r重線性,其定義關係爲:

$$f(v_1, \ldots, av_i + \bar{a}\bar{v}_i, \ldots, v_r) = af(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + \bar{a}f(v_1, \ldots, \bar{v}_i, \ldots, v_r).$$

現在假設$\tau\in V^*$,$\theta\in W^*$,此即τ與θ分別爲V及W上的實值線性函數,則若定義$\tau\otimes\theta: V\times W\to R$如下:

$$\tau\otimes\theta(v, w) = (\tau v)(\theta w).$$

容易證明這是一個實值的雙線性函數,我們就稱之爲τ與θ的**張量乘積**(tensor product)。

容易證明同一類型具有同樣定義域與值域的多重線性映射之間可以引入加法以及係數乘法的運算而形成一個向量空間。例如所有把$V_1\times V_2\times\cdots\cdots\times V_r$映射到$W$的$r$重線性映射全體就構成一個向量空間而記爲$L(V_1,\cdots\cdots,V_r;W)$。

習題 2.8.1 設τ與θ分別爲V^*與W^*中的任意元素,試證所有這些張量乘積$\tau\otimes\theta$可以用來生成整個空間$L(V,W;R)$。又證明除了一些最特別的場合,不然所有這種張量乘積$\tau\otimes\theta$的集合只是$L(V,W;R)$中的一個**真子集合**(proper subset),意即$L(V,W;R)$中存在某些映射只能表示成兩個或多個這種張量乘積之和。試決定上面所提例外的特別情形。

2.9 自然配對

假設V是個向量空間而 $\tau\in V^*$ ，因此按定義τ是V上的函數，把V上的變數v指定到實數 τv 。但是我們知道所有這些τ也構成一個向量空間V^*，所以我們可以從另一個角度來看v 。讓τ在V^*中任意變動而看如一個V^*值的變數，我們就可以把v看成一個定義在V^*上的函數，它在τ的值就取為實數τv 。由V^*中向量空間的結構立即可見這樣定義的函數v是個V^*上的實值線性函數，因此應該是V^{**}中的元素。這樣就自然的把V放進V^{**}之中，而把V中的向量看成V^*上的線性函數。這種認同就稱為從V到V^{**}的自然嵌射（natural imbedding）。由於這種嵌射單單跟V的向量空間結構本身有關，而與基的選擇無關，因此稱為是自然的嵌射。

定理 2.9.1 從V到V^{**}的自然嵌射是個從V到V^{**}的同構映射。

證明 假設在這自然嵌射之下$v\in V$在V^{**}中的影像記為$\bar{v}$，則$\bar{v}$: $V^*\to R$: $\bar{v}\tau=\tau v$ 。對所有$\tau\in V^*$成立。由於

$$
\begin{aligned}
(\overline{\alpha v+\beta w})\tau &= \tau(\alpha v+\beta w)=\alpha\tau v+\beta\tau w \\
&= \alpha\bar{v}\tau+\beta\bar{w}\tau=(\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})\tau
\end{aligned}
$$

可見v到$\bar{v}$這嵌射是線性的。現在假設$\bar{v}=0$，則對任意τ都有：

$$0=\bar{v}\tau=\tau v$$

要證明這時必定$v=0$ 。不然假設$v\neq 0$ ，可將v放進一組基$\{e_i\}$之中，而$e_1=v$ ，令$\{\varepsilon^i\}$為其對偶基，這時就有：

$$\bar{v}\varepsilon^1=\varepsilon^1 v=\varepsilon^1 e_1=1\neq 0,$$

而與$\bar{v}=0$之條件不符。這樣已完成此自然嵌射為一對一映射之證明。根據定理2.7.1 V^*與V^{**}之維數相同，因此由定理 2.5.1之系可知此自然嵌射是個同構映射。□

註：假設V爲無窮維向量空間，可由同樣證明得知從V到V^{**}的自然嵌射仍爲一對一。但是這時由於不可能爲蓋射，因此使得這自然嵌射並非同構映射。

習題 2.9.1 設$\{e_i\}$爲V中之一組基，取V^*中之對偶基$\{\varepsilon^i\}$，然後再對此基取其在V^{**}中的對偶基。試證這組對偶基只不過是原來$\{e_i\}$在自然嵌射之下於V^{**}中之影像$\{\bar{e}_i\}$罷了。

對於τv除了前述兩種看法：固定τ而認爲是V上的線性函數或者固定v而認爲是V^*上的線性函數之外，我們還可以給出第三種看法，就是將v與τ同時看爲變數而考慮如下的函數：

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \to R,\ \langle v, \tau\rangle = \tau v$$

而稱之爲將V與V^*自然配對成實數。立即能證明這種自然配對（natural pairing）函數是個雙線性映射。

如果$\{e_i\}$是V中的一組基而$\{\varepsilon^i\}$爲其對偶基，又取$v = a^i e_i$，$\tau = b_i \varepsilon^i$，則立即計算得：

$$\begin{aligned}\langle v, \tau\rangle &= b_i\varepsilon^i(a^j e_j)\\ &= b_i a^j \delta^i_j\\ &= b_i a^i.\end{aligned}$$

因此就一組固定基及其對偶基而言，要估算自然配對之值非常簡單：只需將v與τ的相應成分相乘然後全部加起來就是了。因爲這緣故自然配對也可稱爲V中向量與V^*中對偶向量之間的純向積（scalar product）。

2.10 張量空間

取V爲一個向量空間。則一個其變數都限於V或V^*中之元素的實值多重線性函數就稱爲V上的張量。所有這些V上之張量所生成的向量空間就稱爲V上的張量空間。從V^*中所取的變數的個數稱爲這張量的逆變次數，而從V中所取的變數之個數稱爲這張量的順變次數。例如對於一個從

$V^* \times V \times V \to R$之張量來講其逆變次數爲一，順變次數爲二，因此這張量之類型（type）記爲（1，2）。

兩個張量如果屬於同一類型，但是其中V與V^*之秩序不相同，則我們仍說這兩張量沒什麼區別。因此一個定義在$V \times V^* \times V$上的多重線性函數就可認爲是個定義於$V^* \times V \times V$上的多重線性函數，而爲屬於（1，2）型的張量。等到第2.15節及2.19節我們會進一步考慮具有某種對稱性質的張量，請也參閱習題2.16.6以及習題2.17.4。

我們把所有（1，2）型的張量或即所有從$V^* \times V \times V \to R$之多重線性函數所構成的空間記爲：

$$V \otimes V^* \otimes V^* = T^1_2(V).$$

因此V就可看成屬於（1，0）型的張量空間，因爲按定理2.9.1 V被看成爲V^{**}，所以是V^*上的線性函數空間。同樣V^*是（0，1）型的張量空間。一般而言，所有屬於（r，s）型的張量構成的張量空間記爲$T^r_s = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$，其中有$r$個$V$，$s$個$V^*$。因此$T^r_s$中的張量就是從$r$個$V^*$及$s$個$V$之卡氏乘積

$$V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V$$

到R的多重線性函數。

習慣上我們就說屬於（0，0）類型的張量就是個實數，因此$T^0_0 = R$，而屬於（1，0）類型的張量稱爲一個逆變向量，屬於（0，1）型的張量稱爲順變向量。屬於（r，0）型的張量稱爲逆變張量，屬於（0，s）型的張量稱爲順變張量。

在第2.8節中所使用的符號與本節之符號用法相合。事實上，如果$v \in V$，$\tau \in V^*$，則$v \otimes \tau \in V \otimes V^*$，因爲$v \otimes \tau$是定義成$V^* \times V$上的雙線性函數。可是如同習題2.8.1中已經指明，$V \otimes V^*$這張量空間中不只含有這種張量乘積$v \otimes \tau$，而是由一些這種張量乘積之和所組成。

2.11 張量代數

在張量空間的結構裏已經看到同一類型的張量可以相加，也可以乘以

實係數。在本節我們要進一步定義可能不同類型的張量間的張量乘積。設 A 爲 (r, s) 型的張量而 B 爲 (t, u) 型的張量，則定義 $A\otimes B$ 爲一個 $(r+t, s+u)$ 型的張量如下：

$$A\otimes B \quad (V^*)^{r+t}\times V^{s+u}\to R$$
$$A\otimes B(\tau^1,\ldots,\tau^{r+t},v_1,\ldots,v_{s+u})$$
$$=A(\tau^1,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s)B(\tau^{r+1},\ldots,\tau^{r+t},v_{s+1},\ldots,v_{s+u}).$$

這樣的定義顯然推廣了前面第 2.8 節裏所給 $v\otimes\tau$ 的定義。

關於張量乘積，結合律與分配律顯然都能成立，而有：

$$(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C),$$
$$A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C,$$
$$(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C,$$

其中 A，B，C 爲任意使得上列公式有意義的張量。

習題 2.11.1 假設 v，$w\in V$ 爲線性無關的向量，試證 $v\otimes w\neq w\otimes v$。因此一般而言，張量乘積是不可交換的。

2.12 新的解釋法

除了在定義中把張量當做實值的多重線性函數之外，我們另外還能對張量給予其他幾種不同的解釋。因爲在物理或幾何的應用時，這些其他的解釋可能會比看成多重線性函數還來得方便。因此很要緊的一件事就是我們應該學會如何從一種解釋翻譯成另種解釋。隨著張量之次數的增加，各種可能的解釋法也就增多起來。

首先就 $(1, 1)$ 類型的張量 A 來看看如何得出其他新的解釋法。固定 $\tau\in V^*$，則 $A(\tau, v)$ 就是 $v\in V$ 上的線性函數。若以 $A_1\tau\in V^*$ 記之，則有：

$$\langle v, A_1\tau\rangle = A(\tau, v). \tag{2.12.1}$$

由於A為雙線性，因此$A_1\tau$就τ的函數而言是一個線性函數：

$$A_1: V^* \to V^*, \tau \to A_1\tau.$$

因此已經證明對於每個（1，1）型的張量A我們就對應出一個從V^*到自身的線性映射A_1。

反之，考慮$B: V^* \to V^*$為一個線性映射，則若定義

$$A(\tau, v) = \langle v, B\tau \rangle.$$

由於B為線性，＜，＞為雙線性，因此立即能證明A是個屬於（1，1）型的張量。當然這時的$A_1 = B$。因此兩者互相等價。

同樣，如果固定$v \in A$，可以將$A(\tau, v)$看成$\tau \in V^*$上的線性函數，因此可記為$A_2 v \in V^{**} = V$。而有：

$$\langle A_2 v, \tau \rangle = A(\tau, v),$$

而當然$A_2: V \to V$為線性映射。反之如果有一個線性映射$B: V \to V$，我們可得唯一的$A \in T_1^1$滿足$B = A_2$。

所有上面這些新解釋法都不涉及基的選用，因此都是自然的解釋法。而得證：

定理 2.12.1 向量空間T_1^1，$L(V, V)$以及$L(V^*, V^*)$都彼此互相自然的同構。

如果選用V中的一組基$\{e_i\}$，而取其對偶基$\{\varepsilon^i\}$，若$\dim V = d$，則d^2個張量$e_i \otimes \varepsilon^j$構成$T_1^1$中的一組基。事實上任取$A \in T_1^1$，令$A_j^i = A(\varepsilon^i, e_j)$，則由下面定理可得$A = A_j^i e_i \otimes \varepsilon^j$。

定理 2.12.2 如果給定V中的一組基及其對偶基並某張量對此基之值，則此張量就完全決定。基與對偶基中各個元素的張量乘積構成張量空間裏的一組基，此張量對這組基的成分就是這些值。

證明 取$A\in T^r_s$，又令 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=A(\varepsilon^{i_1},\ldots,\varepsilon^{i_r},e_{j_1},\ldots,e_{j_s})$ 。則對於任意

$$\tau^1,\ldots,\tau^r\in V^* \text{ 以及 } v_1,\ldots,v_s\in V,$$

都可將其寫成：

$$\tau^p=a^p_i\varepsilon^i,\qquad v_q=b^j_q e_j,\qquad p=1,\ldots,r,\quad q=1,\ldots,s$$

因此可計算得

$$\begin{aligned}A(\tau^1,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s)&=a^1_{i_1}\ldots a^r_{i_r}b^{j_1}_1\ldots b^{j_s}_s A(\varepsilon^{i_1},\ldots,\varepsilon^{i_r},e_{j_1},\ldots,e_{j_s})\\&=a^1_{i_1}\ldots a^r_{i_r}b^{j_1}_1\ldots b^{j_s}_s A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\\&=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\langle e_{i_1},\tau^1\rangle\ldots\langle e_{i_r},\tau^r\rangle\langle v_1,\varepsilon^{j_1}\rangle\ldots\langle v_s,\varepsilon^{j_s}\rangle\\&=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\ldots\\&\qquad\otimes\varepsilon^{j_s}(\tau^1,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s).\end{aligned}$$

或即

$$A=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{j_s},$$

至於所有這些張量乘積$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{j_s}$彼此線性無關則非常容易看出，請讀者自行證明。□

系 張量空間T^r_s的維數爲d^{r+s}。

現在回來考慮屬於（1，1）類型的張量，我們可以將其解釋成座標的形式，如同下列定理所述：

定理2.12.3 假設$A=A^i_je_i\otimes\varepsilon^j$這張量落在$T^1_1$中，則$A^i_j$爲：

(a) A就基$\{e_i\otimes\varepsilon^j\}$而言所具有的成分。

(b) 就$\{\varepsilon^i\}$爲V^*中之參考基時，線性映射A_1之矩陣表示（A^i_j）中的元素，其中i代表行指標，而j是列的指標。

(c) 取$\{e_i\}$爲V中之參考基時線性映射A_2之矩陣表示（A^i_j)中的元

素，其中 i 爲列指標而 j 爲行指標。

證明　由定義立即得到(a)必定成立。至於(b)則由（2.12.1）以及定理 2.12.2 我們有：

$$\begin{aligned}\langle e_j, A_1\varepsilon^i\rangle &= A(\varepsilon^i, e_j)\\ &= A^i_j,\end{aligned}$$

現在如果 A_1 之矩陣表示爲（B^i_j），則有 $A_1\varepsilon^i = B^i_k\varepsilon^k$，因此：

$$\begin{aligned}\langle e_j, A_1\varepsilon^i\rangle &= \langle e_j, B^i_k\varepsilon^k\rangle\\ &= B^i_k\delta^k_j\\ &= B^i_j.\end{aligned}$$

而知（A^i_j）=（B^i_j）。這兒按定義 i 是行的指標。

最後論到(c)，則有：

$$\langle A_2e_j, \varepsilon^i\rangle = A^i_j,$$

由上面類似的證法，若令 A_2 之矩陣表示爲 C^i_j：A_2, $A_2e_j = C^i_je_i$，則有：

$$\langle A_2e_j, \varepsilon^i\rangle = \langle C^k_je_k, \varepsilon^i\rangle = c^k_j\delta^i_k = c^i_j$$

而知（A^i_j）=（C^i_j）。可是這兒按定義 j 才代表行的指標。□

如果繼續取 $\{e_i\}$ 及 $\{\varepsilon^i\}$ 爲 V 及 V^* 之基。任取 $v = a^ie_i \in V$，則 A 看成 V 上之線性映射 $A_2: V \to V$ 時，可寫成：

$$\begin{aligned}A_2v &= (A^i_je_i \otimes \varepsilon^j)_2v\\ &= A^i_ja^k(e_i \otimes \varepsilon^j)_2e_k\\ &= A^i_ja^ke_i\langle e_k, \varepsilon^j\rangle\\ &= A^i_ja^je_i.\end{aligned}$$

因此就像是我們單單使用 A 中涉及 ε^j 的第二部分來對 v 取值，而不管 A 的其他部分。同樣若 $\tau \in V^*$, $\tau = b_i\varepsilon^i$，我們也有

$$\begin{aligned} A_1\tau &= (A^i_j e_i \otimes \varepsilon^j)_1 \tau \\ &= A^i_j b_k (e_i \otimes \varepsilon^j)_1 \varepsilon^k \\ &= A^i_j b_k \varepsilon^j \langle e_i, \varepsilon^k \rangle \\ &= A^i_j b_i \varepsilon^j \end{aligned}$$

因此就像是我們單單使用A中涉及 e_i 的第一部分來對 τ 取值，而不管A的其他部分。

習題 2.12.1 既然$\langle\ ,\ \rangle$是 $V\times V^*$ 上的雙線性函數，因此這是個屬（1，1）型的張量。試問其相應的映射 $\langle\ ,\ \rangle_1 : V^*\to V^*$ 以及$\langle\ ,\ \rangle_2 : V\to V$ 是什麼？另外$\langle\ ,\ \rangle$之成分又是什麼？

關於較高次的張量我們可以用類似的方法來給出其他各種的解釋，就是把 V^* 及V映射到張量空間的多重線性映射。例如可以把一個屬於（1，2）型的張量A看成一個映射：

$$A_{2,3}: V\times V\to V.$$

其中的指標 2 及 3 表示$V\times V$中的變數（v，w）成為A中的第二及第三個變數，因此使得$A(\cdot, v, w): V^*\to R$變成V^*上的線性函數，或即就是$V^{**}=V$中的元素了。如果使用座標表示則工作起來更加顯然；假設：

$$A = A^i_{jk} e_i \otimes \varepsilon^j \otimes \varepsilon^k,$$

則可得：

$$A_{2,3}(v, w) = A^i_{jk}\langle v, \varepsilon^j\rangle\langle w, \varepsilon^k\rangle e_i \in V.$$

至於同樣這個$A\in T^1_2$的其他解釋尚有：

$$\begin{aligned} &A_{1,2}: V^*\times V\to V^*, \\ &A_{1,3}: V^*\times V\to V^*, \\ &A_1: V^*\to V^*\otimes V^*, \end{aligned}$$

$$A_2: V \to V \otimes V^*,$$
$$A_3: V \to V \otimes V^*.$$

等等。這兒例如像A_2映射的像域，就如定理 2.12.1所述，可以看如$L(V, V)$。因此A這個映射可以被解釋成對於V中的每個元素v都線性地指定一個從V到V的線性轉換：$(A_2 v)_2$。至於這個線性轉換$(A_2 v)_2$的矩陣表示爲$(A^i_{kj}\langle v, \varepsilon^k\rangle)$，其中$i$爲列指標而$j$爲行指標。

習題 2.12.2 張量乘積$A\otimes B$的成分就是A與B各別成分的乘積，而有：

$$(A \otimes B)^{i_1 \cdots i_{r+t}}_{j_1 \cdots j_{s+u}} = A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} B^{i_{r+1} \cdots i_{r+t}}_{j_{s+1} \cdots j_{s+u}}.$$

習題 2.12.3 那一種類型的張量可以解釋成爲$V^* \to V$的一個多重線性映射？

2.13 轉換律

我們可以把一個張量A的成分看成所使用的基$\{e_i\}$，以及用以表達此張量的類型之上下標的函數。例如A若是個(1，2)型的張量，則使用基$\{e_i\}$及$\{\varepsilon^i\}$而給出的成分，按照定理 2.12.2 可以給爲：

$$A^{e,i}_{jk} = A(\varepsilon^i, e_j, e_k).$$

注意這兒我們以兩種方法來解釋A。第一，它是$V^* \times V \times V$上的多重線性函數；第二，它是基e以及三個整數變數i，j及k的四變數函數。

現在取另一組基$\{f_i\}$，而假設$\{\varphi^i\}$爲其對偶基。如果f_i與第一組基的關係方陣爲(a^j_i)，則$\{\varphi^i\}$與$\{\varepsilon^i\}$之關係爲逆方陣(b^i_j)，而有如下表達式：

$$f_i = a^j_i e_j,$$
$$\varphi^i = b^i_j \varepsilon^j.$$

這時對於新基而言，張量A的成分可以寫成：

$$\begin{aligned} A_{jk}^{f\ i} &= A(\varphi^i, f_j, f_k) \\ &= A(b^i_m e^m, a^n_j e_n, a^p_k e_p) \\ &= b^i_m a^n_j a^p_k A(e^m, e_n, e_p) \\ &= b^i_m a^n_j a^p_k A^{e\ m}_{np}. \end{aligned} \tag{2.13.1}$$

這就是A之成分在基之變換下的古典轉換律。其他類型張量的成分之轉換律顯然可以立即按類似方法給出。

在可微流形M之任意點m取其切空間而記爲$V = M_m$。這時隨著所使用的座標系統(x^i)，(y^i)我們可以在V中取得不同的基，以及他們之間的轉換方陣如下：

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, & e^i &= dx^i, \\ f_i &= \frac{\partial}{\partial y^i}, & \varphi^i &= dy^i, \\ a^j_i &= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}, & b^i_j &= \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

當然這些座標向量場及微分形都是在m點取值的。這樣我們立即可將公式(2.13.1)改寫成一般教科書中大家熟悉的：

$$A^{y\ i}_{jk} = A^{x\ m}_{np} \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^k}. \tag{2.13.2}$$

習題 2.13.1 取 $\dim V = 3$ 而考慮 $A = A^{e\cdot i}_{\ \ j} e_i \otimes e^j$，其中：

$$(A^{e\cdot i}_{\ \ j}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

現在取新基爲 $\{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = 2e_2, f_3 = -e_2 + e_3\}$，又取其對偶基爲

$\{\varphi^i\}$。令 $v = -e_1 + 2e_3$，$\tau = 5\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$.

(a) 試計算 $A(\tau, v)$。

(b) 計算 $A_2 v$。

(c) 計算 $A_1 \tau$。

(d) 將 φ^i 表示成 ε^i 的線性組合。

(e) 將 v 及 τ 表示成新基的線性組合。

(f) 試計算新的成分 $A'^{\cdot i}_{j}$。

(g) 試證 $\det(A^{e\cdot i}_{\ j}) = \det(A'^{\cdot i}_{j})$ 及 $\mathrm{tr}(A^{e\cdot i}_{\ j}) = \mathrm{tr}(A'^{\cdot i}_{j})$。其中 det 代表該方陣之行列式值，而 tr 代表該方陣之跡（trace），就是全部主對角線上之項的和，因此 $\mathrm{tr}(A^i_j) = A^i_i$。注意這時 $(A^{e\cdot i}_{\ j})$ 為對稱方陣，但是 $(A'^{\cdot i}_{j})$ 則否。

(h) 使用新基重新計算(a)，(b)，(c)而證明其結果相同。

如果在 V 中已經固定一組基而總是就這組基來考慮，那麼只需給出一個張量的成分就完全決定了這張量。這就是張量的古典定義法。在這古典定義中一個張量是一個具有 $1+r+s$ 個變數的函數，其中基（或即座標系統）被當做一個變數，而 r 代表逆變的上標個數，s 代表順變的下標個數。然後對於每兩組基這函數滿足一個屬 (r, s) 張量型的轉換律，就像公式 (2.13.2) 所示當 $r=1$，$s=2$ 的方程式。這樣當我們講到張量 A^i_{jk} 時其意思就類似於談到函數 $f(x, y)$ 時，把這函數 f 的兩個變數 x，y 全列舉出來，因此也照樣把張量 A 的上下指標（變數）全列舉出來而寫成 A^i_{jk}。這樣的表示法只在邏輯上稍欠通順，但是在實用上卻全無任何缺點。

習題 2.13.2 假設 A 是個 $(1, 1)$ 型的張量又假設對於每一組基 A 所寫出來的成分全都相同，試證這時 A 應為 <，> 的倍數，此即存在實數 α 使得 $A^i_j = \alpha\delta^i_j$。

習題 2.13.3 假設 A 是 (r, s) 型的張量而且對於每一組基 A 的成分皆相同，試證或者 $A = 0$ 或者 $r = s$。

2.14 不變量

以張量做爲其變數的實值函數常可使用此張量對於某固定基之成分來加以表達。現在假設使用任何基來表達這函數時，其值皆能保持不變，則說這函數就是一個**不變量**（invariant），或實值不變量。如果函數的值爲張量，而此函數與基的選取無關，則說這函數是**張量不變量**（tensor invariant）。

爲示範這些觀念，我們來定義一種稱爲**跡**（trace）的定義於（1，1）型張量之上的不變量，這種不變量在矩陣理論中是大家所熟知的。前面已知（1，1）型的張量可以被考慮成方陣。假設 $A = A^i_j e_i \otimes \varepsilon^j$，我們定義：

$$A\text{之跡} = \operatorname{tr} A = A^i_i,$$

或即方陣 (A^i_j) 主對角線上元素之和。首先我們無法直接看出這樣定義的跡會跟基 $\{e_i\}$ 的選取無關，因爲這些 A^i_j 原是跟 $\{e_i\}$ 有關的。因此選取任意另外一組基 $\{f_i\}$ 及其對偶基 $\{\varphi^i\}$，則有 $A = A^{f\cdot i}_{\cdot j} f_i \otimes \varphi^j = A^{e\cdot i}_{\cdot j} e_i \otimes \varepsilon^j$，我們想證明 $A^{f\cdot i}_{\cdot i} = A^{e\cdot i}_{\cdot i}$。使用公式（2.7.3）到（2.7.6）等有關基的變換符號與公式，可得如下的轉換律：

$$A^{f\cdot n}_{\cdot m} = A^{e\cdot i}_{\cdot j} a^j_m b^n_i,$$

因此可計算得：

$$A^{f\cdot i}_{\cdot i} = A^{e\cdot p}_{\cdot j} a^j_i b^i_p = A^{e\cdot p}_{\cdot j} \delta^j_p = A^{e\cdot i}_{\cdot i}.$$

這就證明了：

定理 2.14.1 定義於（1，1）型張量之上的跡是個不變量。

下面來給一個非爲不變量的實例。假設 $d = 2$ 而考慮：

$$A = e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2,$$

這是個屬於（2，0）類型的張量。這時 $A^e_{11} = A^e_{12} = 1$，$A^e_{21} = A^e_{22} = 0$，

所以 $A^e_{ii} = 1$ 。如果我們考慮新基 $\{f_i\}$ 滿足：

$$e_1 = f_1 + f_2 \;;\; e_2 = f_2.$$

即

$$\begin{aligned} A &= (f_1 + f_2) \otimes (f_1 + f_2) + (f_1 + f_2) \otimes f_2 \\ &= f_1 \otimes f_1 + 2f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1 + 2f_2 \otimes f_2, \end{aligned}$$

因此 $A^f_{11} = A^f_{21} = 1$ ； $A^f_{12} = A^f_{22} = 2$ ，而得 $A^f_{ii} = 3$。可見定義於（2，0）型張量之上的跡並非不變量。

當然如果某種量在其定義中根本不涉及任何一組基，則這種量自然是個不變量。可是有時候要不用任何基來給出定義是相當為難的，因此為了方便只好使用基來給出定義，然後再設法建立其不變量的特性。在第十九節當我們學過外代數（exterior algebra）之後我們將能對一個線性轉換 A 的行列式 det A 給出一種不變量的（與基無關的）定義。可是行列式比較通常的定義法則需藉助於 A 對於某一組基所寫成的矩陣表示來加以定義。這時除了定義 det A 之外，必須隨即證明在基的變換之下，det A 的值一直保持不變。事實上如果我們能證明通常所定義的行列式與藉用外代數所定義的不使用基的行列式彼此互相等價，則立即可以看出行列式是個不變量。

上面所談的是定義於一個張量變數上的不變量，可是我們也可以考慮具有多個張量變數的不變量。如果一個不變量函數是線性或多重線性的，則說這是個線性或多重線性的不變量。因此我們可以認為對偶空間 V^* 就是由 V 上所有的線性不變量所組成的空間。同樣 V 上所有屬於（r，s）類型的張量就可以認為是 $V^{*r} \times V^s$ 之上的（$r+s$）重線性不變量。考慮張量變數 A 自身 p 次的張量乘積然後在其上取線性不變量。這種不變量就叫做 A 上 p 次的不變量。例如行列式就是屬（1，1）型張量的 d 次的不變量。

有一種重要的線性不變量就是收縮（contraction），這是前面所提跡不變量的推廣。對於給定的（r，s）張量一個收縮就是將其指定成一個（$r-1$，$s-1$）型的張量，方法如下：

$$B^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}}=A^{i_1\cdots i_{p-1}ki_p\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}kj_q\cdots j_{s-1}}.$$

這稱爲對A中的第p個上標與第q個下標加以收縮。由於p可以是任何一個從1到r的上標，q也照樣可以是任何一個從1到s的下標，可見我們可以有好多種的收縮。

習題 2.14.1　試證明所有這些收縮皆爲不變量。

習題 2.14.2　考慮（3，2）型的張量，試問一共有幾個收縮。

習題 2.14.3　試證若A爲（1，1）型的張量，則（tr A)^{p}是一個A上p次的不變量。（注意這兒既然 tr A 爲不變量則當然其p次方也是不變量。所需證明的是線性的問題，像（tr A)^{2}是否爲$A\otimes A$上的線性函數等等)。

習題 2.14.4　如果把$d\times d$方陣都看如（1，1）型的張量，試證兩個$d\times d$方陣的乘積是這兩方陣的雙線性不變量。（提示：證明方陣乘積其實是張量乘積的收縮。而另方面由定義張量乘積是與基無關的。又由分配律可得其雙線性。）

2.15　對稱張量

如果對於任意一組基張量A之第p個與第q個上標交換其成分都保持不變，則說A關於這兩個上標對稱。同樣可以定義關於任意兩個下標對稱。一個張量A可以看成一個多重線性函數，如果把屬於同類的兩個變數互換而總不影響這函數的值，則說這張量關於這兩個變數對稱。

定理 2.15.1　就一個張量A而言下列三條件互相等價：

(a)　A的第p個與第q個上標互相對稱。

(b)　A的第p個變數與第q個變數互相對稱。

(c)　就某一特別基而言，A的成分中將第p個與第q個上標互換，其

成分相同。

證明　首先注意(c)是(a)的特別情形。另外把A看成一個多重線性函數時，若取變數爲這些基向量則得到A之成分，因此若(b)成立則當然(a)也成立。所以我們這兒只需證明(c)能夠得出(b)就可以了。現在爲了簡明起見我們令$p=1$，$q=2$，而A是一個(3，1)型的張量。按照(c)存在一組基$\{e_i\}$使得對於任意的i，j，k，m我們都有：

$$A_m^{ijk}=A_m^{jik}.$$

這時對於任意的$\tau_1,\tau_2,\tau_3\in V^*$以及$v\in V$，假設其成分各爲$\tau_{1i}$, τ_{2i}, τ_{3i}以及v^i，則有：

$$\begin{aligned}A(\tau_1,\tau_2,\tau_3,v)&=A(\tau_{1i}e^i,\tau_{2j}e^j,\tau_{3k}e^k,v^m e_m)\\&=\tau_{1i}\tau_{2j}\tau_{3k}v^m A(e^i,e^j,e^k,e_m)\\&=\tau_{1i}\tau_{2j}\tau_{3k}v^m A_m^{ijk}\\&=\tau_{2j}\tau_{1i}\tau_{3k}v^m A_m^{jik}\\&=A(\tau_2,\tau_1,\tau_3,v),\end{aligned}$$

因此得證(b)成立，而整個定理爲眞。□

由這定理可見關於上標或下標的對稱性與關於變數的對稱性其實沒有任何差別，因此以後只使用第一種對稱性。不過記得按照用法都是先把V^*中的變數擺在前面，因此如果說第p個與第q個下標互相對稱，那麼就等於是說第($r+p$)個及第($r+q$)個變數互相對稱。

如果張量A的每一對上標都互相對稱，則說A關於所有的逆變上標皆爲對稱，或說A是逆變對稱的。照樣可以定義順變對稱性。如果A又是逆變對稱也是順變對稱，則說A是對稱的張量。按照通常的用法如果單單說A是對稱的張量，則常常限定A爲純粹逆變的(r，0)型張量，或者爲純粹順變的(0，s)型張量。另外我們也同意一個零次或一次的張量自然具有對稱性，因爲這時根本沒有指標可交換。

從習題2.13.1的實例可以看出一個上標與一個下標之間的對稱性在基的變換下無法保持不變。事實上我們無法給出這種上下標對稱性與座標

無關的定義。從下面的習題更可看出這種上下標的對稱性能引入很強的限制。

習題 2.15.1 如果一個（1，1）型的張量A對於任何一組基而言其上下標都互相對稱$A^i_j=A^j_i$，則必定存在某個實數α使得$A=\alpha I$，其中I是恒等張量（δ^i_j）。

2.16 對稱代數

在張量空間T^r_0中所有的對稱張量構成一個子空間S^r，同樣在T^0_r中所有的對稱張量構成一個子空間S_r。通常一個對稱張量習慣上就用順序遞增的指標所表達的那些成分：

$$A^{i_1\cdots i_r}\ ,\quad i_1\le\cdots\le i_r$$

來給定。這樣所有其他的成分就可以由對稱性等於這組所給成分中的某一個。另方面這組其指標順序遞增的成分之間彼此並沒有什麼可由對稱性來引入的關係。因此S^r的一組基可以透過選取那種使得除了一個這種成分爲一而其他的成分皆爲零的張量做爲基張量來組成。

兩個對稱張量的張量積一般而言並不再是個對稱的張量。例如假設$A=A^{ij}e_i\otimes e_j$與$B=B^{ij}e_i\otimes e_j$皆爲對稱的（2，0）型張量，則$A\otimes B$這個（4，0）型的張量不見得具對稱性，因爲通常來講$A^{ij}B^{kl}$與$A^{ik}B^{jl}$不一定相等。可是我們有辦法定義一種乘法，使得兩個對稱的張量的乘積仍然是個對稱的張量。爲此我們先來定義如下**對稱化的運算**（symmetrization operation）$A\to A_s$：

$$A_s(\tau^1,\ldots,\tau^r)=\frac{1}{r!}\sum_{(i_1,\ldots,i_r)}A(\tau^{i_1},\ldots,\tau^{i_r})\tag{2.16.1}$$

其中的和是就所有1，……，r這些整數能得到的$r!$種排列來考慮的。另外式中的張量A是個（r，0）型張量，τ^1，……，τ^r是V^*中任意元素，當然這些τ^i不見得全不相同。

容易證明透過(2.16.1)式所定義的 A_s 是個(r,0)型對稱的張量，例如取 $r=3$，則由定義對任意 α，β，$\gamma\in V^*$ 都有：

$$\begin{aligned}A_s(\alpha,\beta,\gamma) = \tfrac{1}{6}[&A(\alpha,\beta,\gamma) + A(\beta,\gamma,\alpha) + A(\gamma,\alpha,\beta)\\ &+ A(\beta,\alpha,\gamma) + A(\alpha,\gamma,\beta) + A(\gamma,\beta,\alpha)].\end{aligned} \tag{2.16.2}$$

所以對 α，β，γ 任意加以交換其結果總是相等，所以 A_s 是對稱的張量。

習題 2.16.1　就 $r=2$ 或 4 的情形寫出 A_s 類似於(2.16.2)的表達式。

習題 2.16.2　試證明 A_s 的成分可以透過類似於(2.16.1)的式子由 A 的成分來給出。

習題 2.16.3　設 V 之維數爲 d，設 $S^r\subset T^r_0(V)$ 這子空間的維數爲 $s(d,r)$。由前面的敍述可知 $s(d,r)$ 就是從 1 到 d 中任意選擇 r 個整數 i_1，……，i_r 滿足條件

$$1\le i_\alpha\le i_{\alpha+1}\le d$$

時的所有可能的選法。試證明下列公式：

(a) $s(1,r)=1,\ s(d,1)=d.$
(b) $s(d+1,r)=s(d,r)+s(d+1,r-1).$
(c) $s(d,r)=\binom{d+r-1}{r}$
$\qquad = (d+r-1)!/[r!(d-1)!],$

習題 2.16.4　如果 A 爲對稱，則 $A_s=A$。

假設 $A\in S^p$，$B\in S^q$ 我們定義 $(A\otimes B)_s\in S^{p+q}$ 爲 A 及 B 的對稱積(symmetric product)，而記爲 AB。例如任取 e_1，e_2，e_3 爲 V 中的向量，則有：

$$
\begin{aligned}
e_1e_1 &= (e_1 \otimes e_1)_s = \tfrac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_1, \\
e_1e_2 &= (e_1 \otimes e_2)_s = \tfrac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = e_2e_1, \\
(e_1e_2)e_3 &= \tfrac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)e_3 \\
&= \tfrac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3)_s + \tfrac{1}{2}(e_2 \otimes e_1 \otimes e_3)_s \\
&= \tfrac{1}{6}(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 + e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 \\
&\qquad + e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_2 \otimes e_1) \\
&= e_1(e_2e_3) = e_1(e_3e_2) = \cdots.
\end{aligned}
$$

能證明這種對稱積具有下列三個好性質：

(a) 交換律：$AB = BA$.

(b) 結合律：$(AB)C = A(BC)$.

(c) 分配律：$(A + B)C = AC + BC$.

使用這三個性質能證明任何一個對稱張量都可以表示成下列這種形式之項的和：

$$c(e_1)^{n_1}(e_2)^{n_2}\cdots(e_d)^{n_d}$$

其中 c 爲實數，$\{e_i\}$ 是 V 中的一組基，n_i 爲大於或等於零的整數。換言之，一個對稱張量可以表示成一個具有 d 個未知數（indeterminates）的多項式，而對稱積正好就相應於多項式的乘法。因此當我們要處理對稱張量時我們最方便的就是運用對稱積的符號及性質而不去管通常的張量乘積。

我們只來敍述下面這個定理而不加以證明。這定理當 $r = 2$ 時非常重要，請看第 2.21 節。

定理 2.16.1 對於每個 $A \in T^r_0$，其 A_s 就是那個對每一個 $\tau \in V^*$ 全都能滿足如下關係：

$$A_s(\tau, \ldots, \tau) = A(\tau, \ldots, \tau). \tag{2.16.3}$$

的唯一的對稱張量。

註：顯然公式（2.16.3）是正確的，因爲（2.16.1）式的和之中當所

有 τ^i 都等於 τ 時，我們一共有 $r!$ 個相等的項。可是另方面定理中說到公式(2.16.3)能夠完全決定 A_s，這件事證明起來就比較麻煩。當 $r=2$ 時我們可以藉著在(2.21.1)式及(2.21.2)式中取 $b=A_s$ 來證明(2.16.3)式確能決定 A_s。有時我們也可以拿(2.16.3)式來做爲 A_s 的定義，這時除了證明這樣的 A_s 眞的存在以外還得證明其唯一性。

一個（r，0）型的對稱張量 A 所表成的多項式是個 r 次的齊次多項式。此即每一項中 e_i 之指數的總合正好全都等於 r。V^* 上具有如下形式的實值函數 P：

$$P\tau = A(\tau, \ldots, \tau),$$

〔其中 A 是個（r，0）型的張量〕，稱爲 V^* 上 r 次的齊次多項式函數。他們正就是在第 2.14 節中所定義的 V^* 上 r 次的實數不變量。V^* 上的多項式函數就是幾個不同次數的上面這種齊次多項式函數 P 之和。因此多項式函數跟不同逆變次數的對稱張量之和間具有一對一的關係。

習題 2.16.5 試運用定理 2.16.1 以證明對稱積所滿足的交換律，結合律以及分配律。

習題 2.16.6 假設（0，3）型的張量 A 具有如下的「對稱性」：

$$A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} = 0 \;\; ; \;\; A_{ijk} = -A_{ikj}.$$

假設 $d=3$，試找出 A 中互相無關的成分共有幾個。找出一組這樣的成分，而把所有其他的成分表示成這組成分的組合。

2.17 反對稱的張量

如果在張量兩個上標（或兩個下標）之間對稱性的定義中於更換這兩上標（或兩變數）時由原先函數值不變的要求更換成函數正好改變其符號，則說這時的張量關於這兩上標（或兩變數）是**反對稱的**（skewsymmetric）。下面這定理與定理 2.15.1 相類似，而其證明也完全相同。

定理 2.17.1　關於一個張量 A 如下的三條件是等價的：

(a)　A 的第 p 個及第 q 個逆變上標互相反對稱。

(b)　A 的第 p 個及第 q 個變數互相反對稱。

(c)　對於某一組基而言在 A 的成分中當我們將第 p 個與第 q 個上標對調，則其成分正好相差一個符號。

除了這定理之外關於反對稱張量我們另外進一步還有如下的特徵性質：

定理 2.17.2　張量 A 關於其第 p 個及第 q 個逆變上標具有反對稱性的充要條件是：對於所有 $\tau \in V^*$，將 τ 同時擺在 A 的第 p 個及第 q 個變數的位置，則必定使 A 之值為零。此即對於所有的 $\alpha^i, \tau \in V^*, v_i \in V$，必定：

$$A(\alpha^1, \ldots, \alpha^{p-1}, \tau, \alpha^p, \ldots, \alpha^{q-2}, \tau, \alpha^{q-1}, \ldots, v_1, \ldots, v_s) = 0,$$

證明　現在就 A 是個 $(3, 1)$ 型張量的情形而取 $p=1$，$q=2$ 來證明本定理。至於其他所有的情形其證法本質上沒有任何不同。

假設 A 關於第一及第二個上標為反對稱，則 $A(\tau, \tau, \alpha, v) = -A(\tau, \tau, \alpha, v)$。因此立即得證 $A(\tau, \tau, \alpha, v) = 0$。反之，如果 A 於第一個及第二個變數相同時其值恒等於零，則：

$$\begin{aligned} 0 &= A(\alpha + \beta, \alpha + \beta, \gamma, v) \\ &= A(\alpha, \alpha, \gamma, v) + A(\alpha, \beta, \gamma, v) + A(\beta, \alpha, \gamma, v) + A(\beta, \beta, \gamma, v) \\ &= 0 + A(\alpha, \beta, \gamma, v) + A(\beta, \alpha, \gamma, v), \end{aligned}$$

因此得證：

$$A(\alpha, \beta, \gamma, v) = -A(\beta, \alpha, \gamma, v). \quad \square$$

習題 2.17.1　假設張量 A 為 $(3, 0)$ 型，而且關於第一個及第二個指標為對稱，但是關於第一個及第三個指標卻是反對稱，則必定 $A=0$。

習題 2.17.2　（參考習題 2.15.1）：如果一個 $(1, 1)$ 型的張量 A 對於

每一組基而言其兩個指標皆為反對稱，則必定 $A=0$ 。因此上下標之間的反對稱性照樣也不具有什麼意義。

習題 2.17.3 假設 A 是個 $(r, 0)$ 型的張量，其中任意兩個指標皆互相反對稱。這時就說 A 是個反對稱的張量。試證這時如果 $\tau^1, \ldots\ldots, \tau^r \in V^*$ 彼此線性相關，則必定會使得：

$$A(\tau^1, \ldots, \tau^r) = 0.$$

習題 2.17.4 假設 A 是個 $(0, 4)$ 型的張量滿足如下的對稱性條件（這些就是第 5.11 節中黎曼曲率張量所具有的對稱性）：

(1) $A_{ijkl} = -A_{jikl}$.
(2) $A_{ijkl} = -A_{ijlk}$.
(3) $A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0$.

(a) 試證這時 A 自然也滿足另一對稱條件：

(4) $A_{ijkl} = A_{klij}$.

(b) 這時如果對於所有的 $v, w \in V$ 都有 $A(v, w, v, w) = 0$ ，則必定 $A=0$ 。

(c) 如果 B 及 C 是 $(0, 4)$ 型的張量滿足對稱條件(1)，(2)及(3)，而且如果對於所有 $v, w \in V$ 都有 $B(v, w, v, w) = C(v, w, v, w)$，則必定 $B=C$ 。（提示：只需取 $A=B-C$ ）。

習題 2.17.5 假設 B 是個 $(0, 2)$ 型對稱的張量。以下式：

$$A_{ijkl} = B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk}.$$

來定義一個 $(0, 4)$ 型的張量 A 。

(a) 試證 A 滿足上題中曲率張量所滿足的對稱性(1)，(2)及(3)。

(b) 假設當 $v \neq 0$ 時總有 $B(v, v) > 0$，試證當 v 與 w 互相線性無關時會有 $A(v, w, v, w) > 0$ 。注意我們有如下關係：

$$A(v, w, v, w) = B(v, v)B(w, w) - B(v, w)^2.$$

習題 2.17.6 如果A關於某一對變數爲反對稱，試證A之對稱化張量A_s必定爲零。

2.18 外代數

前面關於對稱張量我們有對稱積的運算，現在對於反對稱的張量我們也能夠引入其間的**外積運算**（exterior product）。這種運算有時也稱爲alternating（反對稱）乘積或Grassmann乘積或wedge乘積。在這外積運算之下反對稱張量所組成的代數稱爲外代數或Grassmann代數。兩個張量A與B之間的外積記爲$A \wedge B$。而可以將所有反對稱的$(r, 0)$型的張量記爲$\wedge^r V$，至於所有反對稱的$(0, s)$型張量之空間則可記爲$\wedge^s V^*$。

一般來講$A \in \wedge^r V$就可以藉著滿足條件$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$的那些成分$A^{i_1 \cdots i_r}$來給出。所有這些嚴格遞增的r個整數的可能取法就相應於從d個元素中取出r個來的可能組合數，因此一共有C^d_r個，這符號代表二項式的係數。從這結果（或者直接從習題2.17.3)如果$r > d$則當然得到$\dim \wedge^r V = 0$。因此當次數大於d時只有零張量能滿足反對稱性。此外還有如下的：

定理 2.18.1 如果$d = \dim V$，則$\wedge^r V$之維數正好等於C^d_r。

現在假設$j_1, \cdots\cdots, j_r$是$i_1, \cdots\cdots, i_r$的重新排列，而A是個反對稱的張量，則A的兩個成分$A^{j_1 \cdots j_r}$及$A^{i_1 \cdots i_r}$或者相等或者只相差一個符號。論到r個數目的排列，我們知道皆可以透過一連串的換位（transposition）來得出。給定一個排列，可能有許多種不同的方法將其寫成一連串換位的結合，可是所牽涉到的換位個數總是或者同爲奇數，或者同爲偶數。因此我們可以隨之而定義此排列之符號爲-1或者$+1$。若用π代表此排列

，則其符號記 sgn π 。例如就 1，2，3 三個整數將其排成 3，1，2 的順序，則這種排列簡記為（3，1，2）。由於這個排列需要用到兩個換位 $(1, 2, 3) \to (1, 3, 2) \to (3, 1, 2)$，或者四個換位 $(1, 2, 3) \to (2, 1, 3) \to (2, 3, 1) \to (3, 2, 1) \to (3, 1, 2)$ 才能做成，因此其符號為 1 。我們可以將反對稱性表達成要求此張量在變數（或指標）被重新排列時所取的張量值（成分）正好等於原來的張量值乘以此排列的符號 。

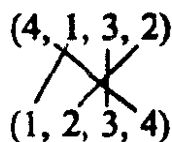
習題 2.18.1 假設 $\pi = (i_1, \cdots\cdots, i_r)$ 是 $(1, \cdots\cdots, r)$ 的一個排列。定義 π 之**逆轉數**（number of inversions）為 $s\pi = s_1 + s_2 + \cdots\cdots + s_r$，其中 s_α 代表滿足 $\beta < \alpha$ 及 $i_\beta > i_\alpha$ 之 i_β 的個數。由於 1 為最小，所以 $s_1 = 0$ 。一般而言，總有 $s_\alpha < \alpha$ 。試證明下列四種性質：

(a) 如果兩個排列 π 與 μ 只相差兩個鄰接數碼之間的換位，則 $s\pi$ 與 $s\mu$ 只相差 1 。

(b) 如果 i_α 與 i_β 之間夾著 k 個數碼，則 i_α 與 i_β 之換位可以透過 $2k + 1$ 個鄰接數碼間的換位來得出 。

(c) 如果 π 與 μ 這兩個排列只相差 i_α 與 i_β 這兩數碼之間的換位，而且如果這兩數碼間夾著 k 個數碼 。那麼 $s\pi - s\mu$ 必定等於某個小於或等於 $2k + 1$ 的奇數 。

(d) 將 π 這排列擺在 $(1, \cdots\cdots, r)$ 這排列之上，然後在同樣的數碼間畫一條連接線。則全部能相交之連接線的對數正好等於 $s\pi$ 。例如考慮（4，1，3，2），則在圖中



有四對相交的連接線 。而另方面由定義我們也有：

$$s(4, 1, 3, 2) = 0 + 1 + 1 + 2 = 4.$$

對於每個 s，我們都能定義**反對稱運算**（alternating operator）為一個線性映射 $T^0_s \to \wedge^s V^*$ ，把張量 A 指定到其反對稱部分 A_α 。定義的

公式跟對稱化運算完全類似；對於任意 v_1，……，$v_s \in V$

$$A_a(v_1, \ldots, v_s) = \frac{1}{s!} \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_s) A(v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}), \qquad (2.18.1)$$

式中是就（1，……，s）的所有 s！個排列取和。容易證明這樣定義的 A_a 確是反對稱的。當然如果 A 是逆變張量，我們照樣可以定義其 A_a。如果原來的 A 已經是反對稱了，則 $A = A_a$。

對於任意兩個反對稱的順變張量 A 與 B 我們就用下式來定義他們之間的**外積**（exterior product）：

$$A \wedge B = (A \otimes B)_a,$$

下面這幾個有關外積的性質都可不難證得：

(a)　結合律：$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

(b)　反交換律：設 A 爲 p 次，B 爲 q 次，則必定：

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A.$$

因此特別對於任意 $\alpha, \beta \in V^*$ 我們都有 $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$。

(c)　分配律：$(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$.

當我們在處理反對稱的張量時應該直接就運用外積運算以及其各種性質最爲方便。如果每次還要回到張量乘積來考慮的話，常會變得反而麻煩。

如果 $\{\varepsilon^i\}$ 是 V^* 中的一組基，則反對稱張量空間 $\wedge^s V^*$ 中的一組基可以給爲 $\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_s}\}$，其中指標皆爲嚴格遞增的數碼：

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq d.$$

就 $\dim V^* = 3$ 的情形來講，$\wedge^0 V^*, \wedge^1 V^*, \wedge^2 V^*$ 及 $\wedge^3 V^*$ 之維數分別爲 1，3，3，1。這時由於 $\wedge^1 V^*$ 與 $\wedge^2 V^*$ 皆同爲三維，我們有可能在其間適當選定某種同構的關係。等到第 2.22 節時我們將透過 V 中內積的結構很自然的導引出來一個特別的同構映射。事實上如果 $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ 爲 V^* 的一組基，則 $\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3, \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1$ 及 $\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$ 構成 $\wedge^2 V^*$ 的一組基。把這兩組基

按目前這秩序相對應，此即若（i，j，k）爲（1，2，3）的一個偶排列，則取 $\varepsilon^i \leftrightarrow \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k$ 。這樣的對應就給出所要的同構映射。將兩個 V^* 中的向量取其外積，然後再按這同構映射對應回 V^* 中來，則所得的運算就是通常三維向量分析中大家所熟悉的**有向積**（cross product）：

$$a_i\varepsilon^i \wedge b_j\varepsilon^j = (a_2b_3 - a_3b_2)\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

$$\leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \varepsilon^1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. = (a_i\varepsilon^i) \times (b_j\varepsilon^j)$$

只有在維數爲 3 時，外積才對應到有向積。因爲當維數 $d \neq 3$ 時 $\wedge^2 V$ 之維數等於 $C^d_2 = d(d-1)/2 \neq d$ 。可是如果就積分的理論來看這種外積的觀念確實是有向積觀念最合宜的推廣。

習題 2.18.2 對於任意 $\tau \in V^*$, $\theta \in \bigwedge^2 V^*$, $v, w, x \in V$，試證：

$$\tau \wedge \theta(v, w, x) = [\tau(v)\theta(w, x) + \tau(w)\theta(x, v) + \tau(x)\theta(v, w)]/3.$$

習題 2.18.3 設

$$A = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 \otimes e_1.$$

試求其對稱部分 A_s 以及反對稱部分 A_a 。在這兒 e_1, e_2, e_3 有沒有必要需線性無關？A 是否可寫成 A_s 及 A_a 之和？

習題 2.18.4 V 中的一組元素 $v_1, \cdots\cdots, v_p$ 爲線性無關的充要條件爲

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0.$$

習題 2.18.5 設 $\{e_i\}$ 爲 V 中的一組基而且 $d \geq 4$，試證向量 $3e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4$, $4e_1 + 5e_2 + 7e_3 + e_4$ 以及 $-2e_1 + 3e_2 + 3e_3 - 3e_4$ 彼此線性相關。

習題 2.18.6 假設 v 是 V 中的非零向量而 $f \in \wedge^p V$。則 $v \wedge f = 0$ 的充要條件是存在 $g \in \wedge^{p-1} V$ 使得 $f = v \wedge g$（提示：取一組以 v 爲其 e_1 的基 $\{e_i\}$ 來考慮）。

習題 2.18.7（Cartan 引理） 設 $\{e_i\}$ 爲 V 中的一組基。若 $v_i \in V$，$i = 1, \cdots\cdots, p$ 滿足條件 $\sum_{i=1}^{p} e_i \wedge v_i = 0$，則必定存在一些實數 A_{ij} 滿足如下關係：

$$v_i = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} e_j \qquad \text{以及} \qquad A_{ij} = A_{ji}.$$

如果存在 $v_1, \cdots\cdots, v_p \in V$ 使得 $A \in \wedge^p V$ 可以表成 $A = v_1 \wedge \cdots\cdots \wedge v_p$，則說 A 這個張量是**可分解的**（decomposable），否則的話 A 就不可分解。

習題 2.18.8 假設 $\dim V \leq 3$，則每一個 $A \in \wedge^p V$ 都是可分解的。可是如果 V 的維數大於 3，而 $\{e_i\}$ 是一組基，試證明 $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ 不可分解。

習題 2.18.9 假設 $A \in \wedge^2 V$，則 A 爲可分解的充要條件是 $A \wedge A = 0$。或即對於任意四個數碼 i，j_1，j_2 以及 j_3 都有：

$$A^{ij_1} A^{j_2 j_3} - A^{ij_2} A^{j_1 j_3} + A^{ij_3} A^{j_1 j_2} = 0.$$

習題 2.18.10 假設 $A \in \wedge^3 V$，試證 A 爲可分解當且唯當：

$$A^{i_1 i_2 j_1} A^{j_2 j_3 j_4} - A^{i_1 i_2 j_2} A^{j_1 j_3 j_4} + A^{i_1 i_2 j_3} A^{j_1 j_2 j_4} - A^{i_1 i_2 j_4} A^{j_1 j_2 j_3} = 0.$$

習題 2.18.11 將上面兩習題之結果推廣到 $A \in \wedge^p V$ 的情形。

習題 2.18.12 試證每一個 $A \in \wedge^{d-1} V$ 都是可分解的。

習題 2.18.13 下面所收集的一些性質涉及V中子空間與外代數之間的關係。Grassmann在最初的時候就是從這些性質出發而建立了外代數。然後使用這外代數來研究子空間的性質。

(a) 假設W是V中一個p維的子空間，試證$\wedge^p W$是$\wedge^p V$ 中所有可分解元素的一個一維的子空間。

(b) 如果Y是$\wedge^p V$中一維的子空間，而且其中元素皆爲可分解，則必定存在V中一個p維的子空間W使得正好有$Y=\wedge^p W$。

現在令W及X都是V的子空間，其維數分別爲p及q，假設 $w\in\wedge^p W, x\in\wedge^q X, w\neq 0, x\neq 0$，則有：

(c) $X\subset W$當且唯當存在一個可分解的元素y滿足$w=x\wedge y$。試問y可以如何的自由選擇？

(d) $X\cap W=0$當且唯當$w\wedge x\neq 0$。

(e) 如果$X\cap W=0$則$w\wedge x$構成$\wedge^{p+q}(W+X)$中的基。

(f) 試證$W=\{v\in V\mid v\wedge w=0\}$。

習題 2.18.14 假設B是個(0，4)型的張量，對於任意V中的元素v，w滿足關係：

$$B(v, w, v, w) = -B(w, v, v, w) = -B(v, w, w, v).$$

(a) 假若$v\wedge w=x\wedge y$，試證 $B(v, w, v, w) = B(x, y, x, y)$.

(b) 這個B對於前面兩個變數是否一定會具有反對稱性？

習題 2.18.15 我們可以把作用於T_0^2上的對稱運算以及反對稱運算都看成線性映射$\mathscr{S}, \mathscr{A}: T_0^2\to T_0^2$，因此可以將其解釋爲張量$\mathscr{S}, \mathscr{A}\in T_2^2$

(a) 試就T_0^2中的一組基來寫出張量$\mathscr{S}, \mathscr{A}$的各個成分。又證明對於每一組基其所得成分皆相同。

(b) 假設張量$C\in T_2^2$之成分對於每組基都同樣，試證必定存在實數α，β使得$C=\alpha\mathscr{S}+\beta\mathscr{A}$

2.19　行列式

外代數所以能在積分理論中大有用處的主因在於它具有自動產生行列式的特色，因此在座標轉換時就自動的使賈氏矩陣之行列式出現在式中。

首先如果W是個一維的向量空間，則任何一個從W到W的線性轉換就等於對W中之向量都乘於某一實數。因此這時其對應 1×1 方陣根本就可看如一個實數。我們將這結果應用到一維的空間$\wedge^d V$之上，其中照習慣 $\dim V = d$ 。

假設 $A: V\to V$ 是個線性映射，我們可以用下式將A延拓成反對稱張量空間之上的線性映射 $A:\bigwedge^p V\to\bigwedge^p V$

$$A(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)=Av_1\wedge\cdots\wedge Av_p \tag{2.19.1}$$

其中p為任意正整數，而$v_1,\cdots\cdots,v_p$為V中任意元素。這樣的延拓就叫做同態延拓（homomorphic extension），而仍記為A。又當$p=0$時，直接定義$A\alpha=\alpha$，其中$\alpha\in\wedge^0 V=R$為任意元素。

定理 2.19.1　對於每一個線性映射 $A:V\to V$，皆存在唯一的同態延拓。

證明　取$\{e_i\}$為V中的一組基。任給$i_1<\cdots\cdots<i_p$定義 $\wedge^p V$ 上的線性映射在其中的基元素之上為：

$$A(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})=Ae_{i_1}\wedge\cdots\wedge Ae_{i_p} \tag{2.19.2}$$

請參照定理2.5.2。顯然若要(2.19.1)式滿足，則對於基向量(2.19.2)必須滿足，因此同態延拓只可能有一個，就是我們藉(2.19.2)式所給的。現在對於任何的$v_i=a_i^j e_j$，要證明(2.19.2)式所定義的映射確實能滿足(2.19.1)式的要求。

由於外積滿足結合與分配律，所以有：

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_p=a_1^{j_1}\cdots a_p^{j_p}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}.$$

注意在這和中不見得有$j_1<\cdots\cdots<j_p$，甚至當$\alpha\neq\beta$時也不見得會j_α

$\neq j_\beta$。但是只要適當集項，而且使用外積的反對稱性我們就可以把 $v_1 \wedge \cdots\cdots \wedge v_p$ 表成 $\wedge^p V$ 的基 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \cdots < i_p\}$ 之線性組合，其中各個係數就是 $v_1 \wedge \cdots\cdots \wedge v_p$ 之成分。可是實際上並不用那麼麻煩。我們只需運用（2.19.2）式以及 A 的線性就可以計算 A 在 $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$ 所取的值。因爲由線性 $A0 = 0$，則若 $\alpha \neq \beta$ 時 $j_\alpha = j_\beta$，那麼 $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} = 0$，就使得 $Ae_{j_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{j_p} = 0$。因此只需考慮所有 j_α 都互不相同的情形。這時如果使用排列 π 能把 $j_1 \cdots\cdots j_p$ 換成遞增的數碼 $i_1 \cdots\cdots i_p$，則有：

$$
\begin{aligned}
A(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) &= A(\pm e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \\
&= \pm A(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \\
&= \pm Ae_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{i_p} \\
&= Ae_{j_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{j_p}.
\end{aligned}
$$

其中若 π 爲偶排列則取正號，若爲奇排列則取負號。既然已證明可以把(2.19.2)推廣到任意順序的 $i_1, \cdots\cdots, i_p$，則由線性立即得：

$$
\begin{aligned}
A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) &= A\,(a_1^{j_1} \cdots a_p^{j_p} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) \\
&= a_1^{j_1} \cdots a_p^{j_p} A(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) \\
&= a_1^{j_1} \cdots a_p^{j_p} Ae_{j_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{j_p} \\
&= (Aa_1^{j_1} e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (Aa_p^{j_p} e_{j_p}) \\
&= Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p. \quad \square
\end{aligned}
$$

註：前述之定義與定理顯然隨即可以修改而適用於較一般的線性映射 $A: V \to W$。

定理 2.19.2 假設 $A: V \to V$ 爲線性映射。將 A 之同態延拓限制到 $\wedge^d V$ 上考慮時其結果就是以 A 對任何一組基 $\{e_i\}$ 的方陣之行列式值來乘以 $e_1 \wedge \cdots\cdots \wedge e_d$。特別就看出（1，1）型之張量 A 的矩陣之行列式是個不變量。

證明　取 $\{e_i\}$ 爲 V 中一組基，則 $e_1 \wedge \cdots\cdots \wedge e_d$ 是 $\wedge^d V$ 的一組基。因此定理所講的可寫爲：

$$A(e_1\wedge\cdots\wedge e_d)=\det(A^i_j)e_1\wedge\cdots\wedge e_d,$$

其中$Ae_j=A^i_je_i$。但是由於A是個同態延拓，可得：

$$\begin{aligned}A(e_1\wedge\cdots\wedge e_d)&=Ae_1\wedge\cdots\wedge Ae_d\\&=A^{i_1}_1e_{i_1}\wedge\cdots\wedge A^{i_d}_de_{i_d}\\&=A^{i_1}_1\cdots A^{i_d}_de_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}.\end{aligned}$$

這兒的和一共有d^d個項。可是那種有兩個i_j相同的項可以去掉，因爲根本其外積爲零。所有剩下的項就剩下$d!$個，$(1,\cdots\cdots,d)$的每一種排列$(i_1,\cdots\cdots,i_d)$都會出現。可是每一項中的$e_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge e_{i_d}$可以一直換位而變成$e_1\wedge\cdots\cdots\wedge e_d$的順序，其中所引入的符號就是這排列的符號$\operatorname{sgn}(i_1,\cdots\cdots,i_d)$。而得證：

$$A(e_1\wedge\cdots\cdots\wedge e_d)=\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)}A^{i_1}_1\cdots A^{i_d}_d\operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_d)\Big)\quad(2.19.3)$$
$$e_1\wedge\cdots\cdots\wedge e_d$$

這兒的係數正好就是方陣(A^i_j)的行列式。□

習題 2.19.1 (a) 試證在$A(e_1\wedge\cdots\cdots\wedge e_d)$中$e_1\wedge\cdots\cdots\wedge e_d$項的係數就是從$(A^i_j)$中去掉第一行及第一列而得出的子行列式值。

(b) 藉著考慮

$$A(e_1\wedge\cdots\wedge e_d)=Ae_1\wedge A(e_2\wedge\cdots\wedge e_d).$$

試求取行列式$\det(A^i_j)$就其中第一行的展開公式。

一個線性映射$A:V\to V$的行列式就定義爲A就任何一組基的對應方陣之行列式$\det A=\det(A^i_j)$。

系 1 (a) 假設A與B皆爲V到V的線性映射，而$A\circ B$爲其合成映射。試證$\det(A\circ B)=(\det A)(\det B)$。

(b) 兩個正方形矩陣之乘積的行列式等於各個行列式之乘積。

證明 設 $e \in \wedge^d V$ 爲一個基，則

$$
\begin{aligned}
(A \circ B) e &= A(Be) \\
&= A(\det B)e \\
&= (\det B)Ae \\
&= (\det B)(\det A)e.
\end{aligned}
$$

但是另方面 $(A \circ B)e = \det(A \circ B)e$，因此(a)得證。取 V 中一組基而考慮 A，B 的矩陣表示，容易看出(b)也成立。□

習題 2.19.2 在上面系 1 的證明裏我們用到如下的結果：合成映射 $A \circ B$ 的同態延拓會等於 A 與 B 個別同態延拓之合成映射。試證明這結果並指出在那一步驟用到這結果。

系 2 如果我們把一個矩陣 (A^i_j) 之行列式看成是其行向量 $C_1 = (A^i_1), \ldots, C_d = (A^i_d)$ 之函數，此即將行列式寫成：

$$\det(A^i_j) = f(C_1, \ldots, C_d)$$

則這個函數 f 是由下列諸性質所決定：

(a) f 爲 d 重線性。

(b) 如果某個行向量重複兩次出現，則 f 之值必定爲零。換言之，將兩個行向量互相交換會使 f 的值改變符號。

(c) 恒等矩陣 (δ^i_j) 之 f 值爲 1。

證明 將 d 個行向量看成是 R^d 這向量空間裏的元素，則(a)與(b)說明 f 是個 R^d 上屬 $(0, d)$ 型的反對稱張量。或即 $f \in \wedge^d R^{d*}$。但是這空間爲一維，因此 f 由其對應於任何一組基之成分，即一個實數所決定。這樣由(c)可知 f 是唯一決定的。□

習題 2.19.3 假設 $A:V\to V$ 爲線性映射，則 A 也可以被解釋成爲一個線性映射 $A^*:V^*\to V^*$。事實上我們就任意 $v\in V$ 及 $\tau\in V^*$ 以 $<Av,\tau>=<v,A^*\tau>$ 來定義 A^*。使用 (2.19.3) 或其他方法證明 $\det A^*=\det A$。這個 A^* 稱爲 A 之對偶映射 (dual adjoint) 或轉置映射 (transpose)。

2.20 雙線性形

所謂 V 上的雙線性形 (bilinear form) (或雙線性形式) 就是一個 (0, 2) 型的張量，此即一個雙線性函數 $b:V\times V\to R$。根據第 2.12 節所述，這樣的函數可以用兩種方法來看如一個線性映射：

$$b_1:V\to V^* \text{ 或者 } b_2:V\to V^*$$

特別如果在 V 中取基 $\{e_i\}$，而設 $\{\varepsilon^i\}$ 爲 V^* 中的對偶基，而有：$b=b_{ij}\varepsilon^i\otimes\varepsilon^j$ 以及 $v=v^ie_i\in V$。這時：

$$\begin{aligned} b_1v &= b_{ij}\langle v,\varepsilon^i\rangle\varepsilon^j \\ &= (b_{ij}v^i)\varepsilon^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2v &= b_{ij}\varepsilon^i\langle v,\varepsilon^j\rangle \\ &= (b_{ij}v^j)\varepsilon^i. \end{aligned}$$

使用古典的語言，從具有成分爲 v^i 的向量 $v\in V$ 映射到具有成分爲 $v_j=b_{ij}v^i$ 之向量 $b_1v\in V^*$ 的運算就稱爲使用雙線性形 b 來把 v 之上標降爲下標。這樣的運算除非我們能重新把降下來的下標上升爲上標，否則就沒什麼意義。換言之，我們必須考慮能具有逆映射的 b_1。

如果 b_1 具有逆映射，則說 b 是非退化的 (nondegenerate) 雙線性形。我們使用下面的定理來說明這性質的重要性：

定理 2.20.1 一個雙線性形 b 爲非退化的充要條件爲：

(a) 對於每個不等於零的元素 $v\in V$，存在 V 中某個元素 w 使得 $b(v,w)\neq 0$。或：

(b) b 之成分所構成的矩陣 (b_{ij}) 是個非奇異矩陣，此即其逆矩陣存在，或即其行列式非爲零。或：

(c) b_2 具有逆映射。

證明 對於基 $\{e_i\}$ 及 $\{\varepsilon^i\}$，映射 $b_1: V \to V^*$ 之對應矩陣爲 (b_{ij})，至於映射 b_2 之矩陣則爲 b_1 之矩陣的轉置。可見條件(b)與(c)互相等價。

現在假設 b_1 爲非退化，則對於 V 中每個非零元素 v 皆有 $b_1 v \neq 0$。因此當然存在元素 $w \in V$ 滿足 $\langle w, b_1 v \rangle \neq 0$，或即：$b(v, w) \neq 0$，因此條件(a)成立。

反之，假設(a)成立，則對於 V 中每個 $v \neq 0$，都存在某個 $w \in V$ 使得 $\langle w, b_1 v \rangle = b(v, w) \neq 0$，因此必定 $b_1 v \neq 0$。可見 b_1 把非零元素映射成非零元素。另方面由於 $\dim V = \dim V^*$，可見 b_1 是個同構映射。□

我們這兒不預備討論最一般的雙線性形，而只來限制於考慮對稱的或者反對稱的雙線性形。但是應記得任何雙線性形都可寫成一個對稱的及另一個反對稱的雙線性形之和：$b = b_s + b_a$，其中：

$$b_s(v, w) = [b(v, w) + b(w, v)]/2,$$
$$b_a(v, w) = [b(v, w) - b(w, v)]/2.$$

習題 2.20.1 試證 (b_{ij}) 的行列式並非爲 b 的一個不變量。但是這行列式不爲零，或者爲正爲負卻是不變量。

習題 2.20.2 舉例說明儘管 b 本身爲非退化，但是有可能其 b_s 及 b_a 卻同時皆可能爲退化。

習題 2.20.3 假設 (b^{ij}) 是 (b_{ij}) 之逆矩陣。試證前述使指標從上到下的運算之逆運算可以給爲 $v_j \to v^j = b^{ij} v_i$。任意張量的指標，都可以使用 b 按照類似方法加以上昇或下降。試證將 b^{ij} 之指標下降的結果所得到的就是 b_{ij}。

2.21 二次形

一個V上的二次形就是一個以V內元素爲變數的二次不變量，換言之就是V上的一個二次多項式。對於每一個二次形q就可以指定一個對稱的雙線性形b定義爲：

$$b(v, w) = [q(v + w) - qv - qw]/2. \tag{2.21.1}$$

顚倒過來對於每一個對稱的雙線性形b都可以指定一個二次形(quadratic form)q定義如下：

$$qv = b(v, v). \tag{2.21.2}$$

習題 2.21.1 試證上面(2.21.1)與(2.21.2)兩式可以互相導引出來。假設其中一個就可得到另外一個。

使用V^*中的基$\{\varepsilon^i\}$，可以將q給成 $qv = a_{ij}\langle v, \varepsilon^i\rangle\langle v, \varepsilon^j\rangle$，其中係數具對稱性$a_{ij} = a_{ji}$。有時不妨就簡單寫成

$$q = a_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j,$$

其中是將$\varepsilon^i\varepsilon^j$看成這兩個$V$上實值線性函數的乘積。另方面如果我們將$\varepsilon^i\varepsilon^j$看成順變向量$\varepsilon^i$及$\varepsilon^j$的對稱積，則同一形式的公式就代表其指定的雙線性形$b$，因爲由$a_{ij} = a_{ji}$而有：

$$\begin{aligned} b &= a_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j \\ &= a_{ij}(\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j)_s \\ &= \tfrac{1}{2}a_{ij}(\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j + \varepsilon^j \otimes \varepsilon^i) \\ &= a_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \end{aligned}$$

如果對於每個$v \neq 0$都有$qv > 0$，則說這個二次形q具有正定性(positive definiteness)。這時也把由q所指定的雙線性形b稱爲正定的。大家所熟悉的正定的二次形之實例就是三維歐氏空間裏的無向積：

$$q(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2.$$

這時如果採用單元正交基 **i**，**j**，**k**，則此二次形之矩陣表示爲單位矩陣或恒等矩陣（δ_{ij}）。另外還有如下定義：

一個二次形 q 爲：

(a) **負定**（negative definite）如果對於所有 $v \neq 0$ 皆有 $qv < 0$。

(b) **半正定**（positive semidefinite）如果對於所有的 v 皆有 $qv \geq 0$。

(c) 半負定如果對於所有的 v 皆有 $qv \leq 0$。

同樣這些術語也可以用來描寫對稱的雙線性形或者其矩陣成分。反正就用其對應的二次形之性質來決定就是，有時我們把一個非退化的對稱雙線性形稱爲內積，但是有時內積是指更強一點要求必須具有正定性才算。

定理 2.21.1 一個正定或負定的雙線性形必定是非退化的。

證明 對於每個 $v \neq 0$，都有 $b(v, v) \neq 0$，因此當然存在 w（取 $w = v$ 就可），使得 $b(v, w) \neq 0$。根據定理 2.20.1 (a)，b 就是非退化的雙線性形。□

實例 在 R^2 上可以考慮如下的二次形：

(a) 正定的二次形：$q(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) 負定的二次形：$q(x, y) = -x^2 + xy - y^2$.

(c) 非退化但卻不是正定也不是負定的二次形：

$$q(x, y) = xy = \tfrac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2], \text{ 或 } q(x, y) = x^2 - y^2$$

(d) 半正定的二次形：$q(x, y) = x^2$.

習題 2.21.2 試證一個非退化的半正定或半負定二次形一定也是正定的

或負定的。

考慮V上的雙線性形b，如果$b(v,w)=0$，則說v及w互相垂直或正交(orthogonal)。如果v與自身正交，此即：$b(v,v)=0$，則v稱爲b的一個零長向量(null vector)。如果b具正定性或負定性，則b只有一個零長向量，就是V中的0。反之如果b只具有單獨一個零長向量0，那麼b必定是正定或負定的，這就是下面的：

定理 2.21.2 假如b不是正定也不是負定，則存在一個不等於0的b的零長向量。

證明 假設b不是正定的，那麼就存在某個$v\neq 0$使得$b(v,v)\leq 0$。同樣，既然b也不是負定的，因此存在某個$w\neq 0$使得$b(w,w)\geq 0$。現在取這兩向量連線上的向量：

$$z=\alpha v+(1-\alpha)w,\ 0\leq\alpha\leq 1$$

所有這些向量都不爲零，除非v與w正好線性相關而有：$v=\beta w$，這時$b(v,v)=\beta^2 b(w,w)\geq 0$，但$b(v,v)\leq 0$，所以$b(v,v)=0$而已經得證。再回到$v$，$w$線性無關的情形，這時：

$$b(z,z)=\alpha^2 b(v,v)+2\alpha(1-\alpha)b(v,w)+(1-\alpha)^2 b(w,w)$$

是關於α的連續函數，當$\alpha=0$時其值$b(w,w)\geq 0$，但是當$\alpha=1$時，其值$b(v,v)\leq 0$，可見必定存在某個α值使得：$b(z,z)=0$，但是這個$z\neq 0$。□

在三維的歐氏向量空間裏$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$這三個向量構成一組正交單元基，此即這三向量彼此正交，而且每個向量均爲單位長。使用這種正交單元基能夠簡化許多的計算。但是所以有這麼方便的基存在是因爲我們考慮歐氏空間，其中有無向積這種自然的內積運算存在。因此我們自然急著會問，如果所考慮的是隨便的一個向量空間V，其維數爲d，那麼對於V上給定

的一個對稱雙線性形 b 是否一定存在一組正交單元基呢？換言之，是否存在 V 中的一組基 $\{e_i\}$ 滿足 $b(e_i, e_j)=\delta_{ij}$。答案是在這問題中條件要求得太多了，因為要是這樣一組正交單元基存在的話，那麼 b 就必須具有正定性。為了這緣故我們想給出一個比較寬的單元向量的定義，以便上面的問題可以弱化一些。

我們說一組基 $\{e_i\}$ 對於 b 是正交單元基如果下列兩條件滿足：(a)當 $i\neq j$ 時，$b(e_i, e_j)=0$；(b)對於每個 i，$b(e_i, e_i)$ 之值（這兒不取和）或為 ±1 或為 0。

這些 $b(e_i, e_i)$ 的值就稱為 b 之**對角線項**（diagonal terms）。如果 b 除了對角線項之外其他成分皆為零，則說對於這組基 $\{e_i\}$，b 取對角線形。對於給定的 b 設法求得一組基使得 b 可以取對角線形的做法就叫做將 b 對角線化。如果我們在 V 中有了一組正交單元基，那麼對此基由 b 所指定的二次形 q 的形狀變得非常簡單。對於任意 v：

$$qv=\sum_i b(e_i, e_i)(v^i)^2.$$

因此就是 v 之成分 v^i 的平方和與差。可見在 V 中求取正交單元基的過程也可以說成將 q 之形狀化簡成一些平方之和與差的過程。

就一組正交單元基 $\{e_i\}$ 而言，我們若將 b 解釋成從 V 到 V^* 的映射 b_1 或 b_2，則他們均為簡單的映射，因為這時他們的矩陣為 $(b(e_i, e_j))$。因此若 $\{\varepsilon^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的對偶基，則 b_1e_i 或為 ε^i，或為 $-\varepsilon^i$ 或為零，由 $b(e_i, e_i)$ 之值決定。另外由 b 之對稱性可知 $b_1=b_2$。反之如果 $b_1e_i=\varepsilon^i, -\varepsilon^i, 0$ 三者中的一個，那麼這組基 $\{e_i\}$ 當然是正交單元基。

接下來要證明本節的主要定理，說明正交單元基的存在性。如果限定 b 為正定（或者限定 b 為負定），那麼使用直接求取對角線化的 Gram-Schmidt 做法我們另外可以給出這定理的別種證明。

定理 2.21.3 對於 V 上的每個對稱的雙線性形 b 必定存在一組正交單元基。對於 V 中任何一組正交單元基我們可以計算 b 之對角線成分中正一，負一或零的個數。這三個數目對於正交單元基而言都是不變量。

證明 我們對於V之維數d使用歸納法來證明。當d為1時，①或者$b=0$，則可以取任意基就都是正交單元基，②或者存在某元素f_1使得$b_{11}=b(f_1,f_1)\neq 0$。這時只需取$e_1=(1/\sqrt{|b_{11}|})f_1$則立即可以算出$b(e_1,e_1)=\pm 1$，因此$\{e_1\}$就是個正交單元基。

接下來假設在$(d-1)$維或更少維數之向量空間上每一個對稱的雙線性都具有一組正交單元基，現在考慮一個d維空間V上的一個給定的b。假設$b=0$，那麼V中任何基都可視為正交單元基。假設$b\neq 0$，我們要證明V中一定存在某個元素v滿足$b(v,v)\neq 0$。因為$b\neq 0$就表示存在$v,w\in V$使得$b(v,w)\neq 0$，現在倘若$b(v,v)=0$又$b(w,w)=0$則可得：

$$\begin{aligned} b(v+w,v+w) &= b(v,v)+2b(v,w)+b(w,w) \\ &= 2b(v,w)\neq 0. \end{aligned}$$

而知我們所言不虛。因此令$v\in V$滿足$\alpha=b(v,v)\neq 0$而定義：

$$e_d=\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}v$$

則立即可計算得 $b(e_d,e_d)=\pm 1$.

現在取 $W=v^{\perp}=\{w\in V\mid b(v,w)=0\}$，就是由所有與$v$互相正交或垂直的向量所構成的集合。對於任意$a\in R$以及$w_1,w_2\in W$都有：

$$\begin{aligned} b(v,\alpha w_1) &= \alpha b(v,w_1)=\alpha 0=0, \\ b(v,w_1+w_2) &= b(v,w_1)+b(v,w_2)=0+0=0, \end{aligned}$$

可見$\alpha w_1\in W$以及$w_1+w_2\in W$，因此W是個子空間。當然因為$v\notin W$所以W為V中的眞子空間，或即$\dim W<d$。這時把b限制於W時仍給出W上的一個對稱雙線性形，根據歸納法假設，W中存在一組基$e_1\cdots\cdots e_k$滿足$b(e_i,e_j)=a_i\delta_{ij}$，其中$i,j=1,\cdots\cdots,k$而$a_i=1,-1$或$0$。現在要證明$k=d-1$，而$e_1,\cdots\cdots,e_d$合在一起構成$V$中的一組正交單元基。這兒由於對於所有$i<d$都有$b(e_i,e_d)=0$，因此$e_1,\cdots\cdots,e_k,e_d$這些向量互相正交又皆為單元這一點沒有問題。剩下只需證明他們構成V

的一組基就可。但是由於 $k+1\leq d$，所以只需證明他們生成整個 V 就可。設 $x\in V$ 而取：$\alpha=b(e_d,e_d)b(x,e_d)$ 並令 $v=\beta e_d$，則由 $b(e_d,e_d)^2=1$ 而有：

$$\begin{aligned} b(x-\alpha e_d, v) &= \beta[b(x,e_d)-\alpha b(e_d,e_d)] \\ &= \beta b(x,e_d)(1-b(e_d,e_d)^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

可見 $x-\alpha e_d\in W$。因此存在係數 a^i 滿足 $x=\sum_{i=1}^{k}a^ie_i+\alpha e_d$，而已經證明 $\{e_i\}$ 能生成整個 V。

接下來爲證明對角線成分 $b(e_i,e_i)=a_i$ 中正數，負數及零的個數爲 b 的不變量而跟正交單元基之選取無關，我們就來試著對他們給出不變量的定義。

(a) $a_i=0$ 之個數其實就是 b 之零空間：

$$N=\{w\mid b(v,w)=0 \text{ 對所有 } v\in V \text{ 成立}\}$$

之維數。事實上這些其 $a_i=0$ 之 e_i 合在一起構成 N 的一組基。因爲對於任意 $w\in N$，$w=w^je_j$，因此對任意數碼 i 都有：

$$\begin{aligned} 0 &= b(e_i,w) \\ &= b(e_i,w^je_j) \\ &= w^jb(e_i,e_j) \\ &= w^ia_i \ (\text{不取和}) \end{aligned}$$

可見若 $a_i\neq 0$ 則其係數 $w^i=0$，換言之 w 單是那些其 $a_i=0$ 之 e_i 的線性組合。反之如果 $a_i=0$，則 $b(e_i,v)=b(e_i,v^je_j)=a_iv^i$（不取合）$=0$，因此 e_i 落在零空間之中。

(b) $a_i=1$ 之個數是 b 的一個極大的正定子空間的維數。（除非 b 是正定的或者半負定的，不然這樣的極大子空間並不見得唯一。但是在所有 b 於其上具有正定性的子空間中，必定會有某個子空間其維數爲最大）。令 W 是這樣的一個子空間，而 $\{e_i\}$ 是 V 中的一組正交單元基而且其數碼適當的經過調整使得 $a_1=\cdots\cdots=a_k=1$，$a_i\leq 0$ 若 $i>k$。而用 X 爲由

$e_1 \cdots\cdots e_k$ 所生成的子空間。則對於任意的 $v \in X$，$v = v^i e_i$，其中當 $i > k$ 時 $v^i = 0$。這時

$$b(v, v) = \sum_{i=1}^{k} (v^i)^2,$$

因此除非 $v = 0$，否則這總是個正值。因此 b 在 X 之上爲正定的。根據 W 的選法我們有：

$$\dim W \geq \dim X = k.$$

現在定義如下的映射 $A: W \to X$。對任意 $w \in W$，$w = w^i e_i$，取 $Aw = \sum_{i=1}^{k} w^i e_i$。顯然 A 是線性映射。假若 $Aw = 0$，則對於所有的 $i \leq k$ 都有 $w^i = 0$。因此：

$$\begin{aligned} b(w, w) &= b(w^i e_i, w^j e_j) \\ &= w^i w^j a_i \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=k+1}^{d} (w^i)^2 a_i \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

這是因爲當 $i > k$ 時 $a_i \leq 0$。但是 b 在 W 上具有正定性，可見 $w = 0$。因此在線性映射 A 之下單單只有一個零向量被映射爲零，這證明了 A 是個從 W 映進 X 的同構映射。而有

$$\dim W \leq \dim X$$

這就證畢 $\dim W = \dim X = k$。

(c) $a_i = -1$ 的個數是 b 的一個極大的負定子空間的維數。其證明方法完全類似於(b)中的做法。

這樣我們就證明完畢整個的定理。□

$a_i = 0$ 之個數，或即 b 之零空間的維數稱爲 b 之**零化度**（nullity）。而 $a_i = -1$ 之個數稱爲 b 之**指標數**（index），而以 I 記之。我們稱呼

$d-\dim N-2I$ 爲 b 的記號（signature），因此 b 的記號就是 $a_i=1$ 之個數與 b 之指標數的差。

論到上面有關正交單元基之存在性的證明，在其中用歸納法按步的設法構造出一組基來。這種構造法在下列情況時可以直接以公式寫出：如果已經給出一組不見得是正交單元的基 $\{f_i\}$，而 b 對這基的成分已知，而且假設 b 具有正定性或負定性，則在上面尋求滿足 $b(v,v)\neq 0$ 之元素 v 的證明就可以省略，因爲任意 $v\neq 0$ 都可以用。這時可以就取 v 來當做 f_i。然後就每一個 f_i，$i<d$，運用 $x-\alpha e_i\in W$ 之公式來得出 W 中的一組基。事實上說穿了這只不過是 Gram-Schmidt 正交單元化過程而已。重新以公式寫出，假設 b 爲正定而 $\{f_i\}$ 爲一組基，取：

$$g_1=f_1,$$
$$g_2=f_2-[b(f_2,g_1)/b(g_1,g_1)]g_1,$$
$$\vdots$$
$$g_i=f_i-\sum_{j=1}^{i-1}[b(f_i,g_j)/b(g_j,g_j)]g_j.$$

則 g_i 彼此互相正交而且線性無關，因爲 f_i 可以用他們來寫出來。最後設 $\alpha_i=1/\sqrt{b(g_i,g_i)}$ 而取 $e_i=\alpha_i g_i$，就得出一組正交單元基來了。我們把所有的 g_i 全找出來，然後再集體加以單元化。但是當然也可以從第一個開始逐個單元化，接下去才做下一個的正交化及單元化，而有如下的公式：

$$g_i=f_i-\sum_{j=1}^{i-1}b(f_i,e_j)e_j.$$

習題 2.21.3 假如 V 中子空間 W 裏的每一個元素 w 都滿足 $b(w,w)=0$，則說 W 是 b 的**等方子空間**（isotropy subspace）。

(a) 假設 W 爲等方子空間而 N 爲零子空間，則 $W+N$ 仍爲等方子空間。

(b) 假設 s 是 b 的記號，則一個極大等方子空間的維數爲

$$(d-|s|+\dim N)/2$$

(c) 假設 $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 是 R^3 上的一個二次形，則其等方子空間就是一個圓錐上經過其頂點的直線。所有這些直線稱爲此圓錐的生成線或母線（generator）。如果考慮以 $q = 0$ 爲方程式的這圓錐，則任意經過圓錐頂點而落在圓錐內面的直線都是極大的負定子空間。至於任意通過頂點而不與圓錐有任何其他交點的平面則爲極大的正定子空間。

習題 2.21.4 將二次形 $q(x, y, z) = xy + yz + xz$ 化簡成一些平方項之和與差。找出一組正交單元基，並計算 q 之指標數，記號以及其零化度。

習題 2.21.5 假設 b 跟 c 爲 V 上之對稱雙線性形具有同樣的指標數以及零化度。試證明存在基 $\{e_i\}$ 及 $\{f_i\}$，使得 b 對前者以及 c 對後者所得到的成分皆一一相等： $b(e_i, e_j) = c(f_i, f_j)$。在這意義之下我們就說指標數及零化度構成對稱雙線性形之一組完全的彼此不相關的不變量。

習題 2.21.6 假設 b 是 V 上的一個正定或負定的雙線性形，而假設 v_1，……，v_k 是一組互相正交的非零向量。試證這組向量必定互相線性無關。如果單假設 b 爲非退化，這性質還能成立否？

2.22 Hodge之對偶性

在第 2.18 節我們已經注意到只要給出三維空間 $\wedge^1 R^3$ 與 $\wedge^2 R^3$ 之間的一個適當同構對應，那麼 R^3 中的有向積就可以看如外積。在本節中我們要進一步推廣這種同構的對應。就像 R^3 中的情形，這些都跟內積有關。

首先我們注意到在 d 維向量空間 V 之上的反對稱張量空間之間其維數有一個明顯的對稱性：$C_p^d = C_{d-p}^d$。因此我們就在每一組同維數的反對稱張量空間中建立 Hodge 運算如下：

$$*: \wedge^p V \to \wedge^{d-p} V.$$

我們會漸漸說明 $*$ 的定義法並註明它是個同構映射。這兒我們都假設 V 中已經給定一個具有正定性的內積 b。同時 V 中也給定一個符號（orienta-

tion）。這兒所謂一個符號就是由$\wedge^d V$ 中的非零元素θ來給出。

當V中有了一個符號，我們可以將V中所有有序的基（ordered basis）區分成兩類：第一類是具有這種符號的，另一類則否。一組有序基（e_1……e_d）如果滿足$e_1 \wedge \cdots\cdots \wedge e_d = \alpha\theta$，其中$\alpha > 0$，則說這組基是落在$\theta$所給的符號中。顯然如果$\alpha > 0$，則$\theta$與$\alpha\theta$所給的符號相同。我們也可以把所有落在一個符號之中的有序基的集合全體認爲就是這個符號。這時這符號中的任何兩組有序基之間的關連方陣之行列式值必定爲正。隨便V中的兩組有序基，如果其間的轉換方陣之行列式值爲正，那麼這兩組有序基或者同時都落在此符號中，或者同時都不在這符號中。V上只有兩個符號，若把θ所代表的稱爲正號，則$-\theta$所代表的就叫做負號。

現在假設V中已經給定一個符號，而設（e_1，……，e_d）是落在此符號中的一組正交單元有序基，則我們稱呼$e_1 \wedge \cdots\cdots \wedge e_d$爲這個具有符號而以$b$爲其內積之向量空間$V$中的體積元素（volume element）。這樣的體積元素是唯一的，因爲假設（f_1，……，f_d）是隨便另外一組落在V之符號中的正交單元有序基，則：

$$
\begin{aligned}
f_i &= a_i^j e_j, \\
b(f_i, f_j) &= \delta_{ij} \\
&= b(a_i^h e_h, a_j^k e_k) \\
&= a_i^h a_j^k b(e_h, e_k) \\
&= a_i^h a_j^k \delta_{hk} \\
&= a_i^h a_j^h.
\end{aligned}
$$

可見（a_j^i）的轉置方陣（a_i^j）正好就是（a_j^i）之逆方陣。或即（a_j^i）是個正交方陣。而有：

$$
\begin{aligned}
\det(\delta_{ij}) &= 1 \\
&= \det(a_i^j)\det(a_j^i) \\
&= [\det(a_j^i)]^2,
\end{aligned}
$$

因此$\det$（a_j^i）或爲1或爲-1。但是（f_1……f_d）及（e_1，……，e_d）皆落在V的符號中，因此$\det$（a_j^i）> 0而得$\det$（a_j^i）$= 1$。而有

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_d = \det(a_j^i)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$$
$$= e_1 \wedge \cdots \wedge e_d.$$

使用一組落在V之符號中的有序基（e_1，……，e_d）我們對於每個$p=0$，1，……，d 要來給出Hodge 運算的定義。首先我們在$\wedge^p V$ 中立即可以考慮一組相應的基｛$e_{i_1} \wedge \cdots\cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \cdots\cdots < i_p$｝。若選取$j_1$，……，$j_{d-p}$ 使得

$$(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{d-p})$$

正好是（1，……，d）的一個偶排列，則定義

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-p}}. \tag{2.22.1}$$

然後將$*$線性的延拓而定義到整個$\wedge^p V$ 之上。現在只需證明這樣所給$*$的定義與有序基（e_1，……，e_d）的選取無關。爲此我們設法將Hodge 運算$*$分解成一些與基之選取無關的映射之合成。

(a) 若 $\theta = e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ 則定義$F\colon \bigwedge^p V \to (\bigwedge^{d-p} V)^*$如下：

$$\langle y, Fx\rangle\theta = x \wedge y,\ \text{其中}\ x \in \bigwedge^p V,\ y \in \bigwedge^{d-p} V,$$

(b) 其次再定義$G\colon (\bigwedge^k V)^* \to \bigwedge^k(V^*)$如下：設｛$e_i$｝爲$V$中任意一組基而｛$\varepsilon^i$｝爲其對偶基。則$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$爲$\wedge^k(V^*)$中的一組基。而$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$爲$\wedge^k V$ 中之一組基，因此其於$(\wedge^k V)^*$中之對偶基若記爲$\{\varepsilon^{i_1\cdots i_k}\}$，則定義 $G\varepsilon^{i_1\cdots i_k} = \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$。然後以線性將$G$延拓到整個空間。這樣所定義的$G$是與基的選取無關的。因爲若取$f_i = a_i^j e_j$爲另外一組基，而又設｛$\varphi^i$｝爲其對偶基，則就任意$A \in (\wedge^k V)^*$來講都有$GA \in \wedge^k V^*$，因此$GA$是一個反對稱的在$V^{**} = V$之上的$k$重線性函數。特別來考慮$A = \varepsilon^{i_1\cdots i_k}$。如果$i_1 < \cdots\cdots < i_k$以及$h_1 < \cdots\cdots < h_k$，則由第2.11節以及(2.18.1)式我們可以寫出：

$$GA(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k}) = \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\pi} \text{sgn}\, \pi\langle e_{h_{\pi 1}}, \varepsilon^{i_1}\rangle\cdots\langle e_{h_{\pi k}}, \varepsilon^{i_k}\rangle$$

$$= \frac{1}{k!}\delta^{i_1}_{h_1}\cdots\delta^{i_k}_{h_k}$$

$$= \frac{1}{k!}\langle e_{h_1}\wedge\cdots\wedge e_{h_k}, A\rangle.$$

這式的兩邊對於 $h_1, \cdots\cdots, h_k$ 皆爲反對稱，因此這式子對任意 $A\in(\wedge^k V)^*$ 都能成立。這樣對於任意 A 我們又有：

$$\begin{aligned} GA(f_{h_1},\ldots,f_{h_k}) &= GA(a^{j_1}_{h_1}e_{j_1},\ldots,a^{j_k}_{h_k}e_{j_k}) \\ &= a^{j_1}_{h_1}\cdots a^{j_k}_{h_k}GA(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!}a^{j_1}_{h_1}\cdots a^{j_k}_{h_k}\langle e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}, A\rangle \\ &= \frac{1}{k!}\langle a^{j_1}_{h_1}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge a^{j_k}_{h_k}e_{j_k}, A\rangle \\ &= \frac{1}{k!}\langle f_{h_1}\wedge\cdots\wedge f_{h_k}, A\rangle. \end{aligned}$$

特別，如果 $\{\varphi^{i_1\cdots i_k}\}$ 是 $\{f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}\}$ 的對偶基，則取 $A=\varphi^{i_1\cdots i_k}$ 時上式仍繼續成立。可是另方面我們卻有：

$$\begin{aligned} \varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^{i_k}(f_{h_1},\ldots,f_{h_k}) &= \frac{1}{k!}\delta^{i_1}_{h_1}\cdots\delta^{i_k}_{h_k} \\ &= \frac{1}{k!}\langle f_{h_1}\wedge\cdots\wedge f_{h_k}, \varphi^{i_1\cdots i_k}\rangle. \end{aligned}$$

可見 $G\varphi^{i_1\cdots i_k}$ 與 $\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^{i_k}$ 應該是同一個多重線性函數而必須彼此相等。這就證明了 G 的定義與基的選取其實無關。

(c) b 是 V 上非退化的對稱雙線性形，因此可以將其解釋成爲一個非奇異的線性映射 $b_1: V\to V^*$ 其逆映射 b_1^{-1} 可以延拓成外代數間的同態映射而記爲 $B:\wedge^k V^*\to\wedge^k V$

現在想證明 $*=B\circ G\circ F$；爲此只需證明在一組基 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge e_{i_p}\}$ 之上他們相等便可，其中 $(e_1, \cdots\cdots, e_d)$ 是一組具號的有序正交單元基

。令 $k=d-p$，而且取 $i_1<\cdots\cdots<i_p$ 及 $j_1,\cdots\cdots,j_k$ 一如 * 之定義時的選法，則不取和的

$$\begin{aligned}\theta &= \langle e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}, \varepsilon^{j_1\cdots j_k}\rangle\theta \\ &= (e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k},\end{aligned}$$

可是如果 $h_1,\cdots\cdots,h_k$ 不是 $j_1,\cdots\cdots,j_k$ 之排列的話，我們也有：

$$\begin{aligned}\langle e_{h_1}\wedge\cdots\wedge e_{h_k}, \varepsilon^{j_1\cdots j_k}\rangle\theta &= 0 \\ &= (e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge e_{h_1}\wedge\cdots\wedge e_{h_k}.\end{aligned}$$

因此對於任意 $y=a^{h_1\cdots h_k}e_{h_1}\wedge\cdots\wedge e_{h_k}\in\bigwedge^k V$，我們都有：

$$\langle y, \varepsilon^{j_1\cdots j_k}\rangle\theta = e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge y,$$

可見必定 $Fe_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}=\varepsilon^{j_1\cdots j_k}$.。但是根據定義 $G\varepsilon^{j_1\cdots j_k}=\varepsilon^{j_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{j_k}$。最後由 B 之定義又有：

$$\begin{aligned}B\varepsilon^{j_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{j_k} &= b_1^{-1}\varepsilon^{j_1}\wedge\cdots\wedge b_1^{-1}\varepsilon^{j_k} \\ &= e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}.\end{aligned}$$

而已經證明在一組基上 $B\circ G\circ F$ 正好都等於 *，所以他們應該彼此相等。□

如果考慮 Hodge 運算 * 跟自己本身的合成映射，就得出對於任意 p 都有 $*\circ *: \bigwedge^p V\to\bigwedge^p V$。事實上隨著 p 及 d 的變化我們能證明 $*\circ *$ 只不過是 $\bigwedge^p V$ 上的恒等映射或負映射而已。因爲如果 $(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_k)$ 是 $(1,\cdots\cdots,d)$ 的一個偶排列，則隨著乘積 $pk=p(d-p)$ 之爲偶數或奇數 $(j_1,\ldots,j_k,i_1,\ldots,i_p)$ 應爲 $(1,\cdots\cdots,d)$ 之偶排列或奇排列。可見假如 $*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$，則有：

$$*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}) = (-1)^{pk}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}.$$

因此我們已經證明了如下的定理。

定理 2.22.1 Hodge 運算 * 跟自己本身的合成映射在 $\bigwedge^p V$ 上可以寫成

$*\circ* = (-1)^{p(d-p)} I_p$，其中 I_p 是 $\wedge^p V$ 上的恒等映射。特別如果 d 是奇數的話那麼 $*$ 就是自己的逆映射。如果 d 是偶數，則當 p 爲偶數時在 $\wedge^p V$ 上 $*$ 是自己的逆映射，可是當 p 爲奇數時在 $\wedge^p V$ 上 $*$ 是自己之逆映射的變號。

習題 2.22.1 在歐氏空間 E^3 中之每點，(dx, dy, dz) 都是一組餘切空間裏的具號的正交單元基，他們都是順變向量。對於不在 z 軸上的點球面座標 ρ, φ, θ 在適當的限制之下是一組可接納的座標系統。因此 $(d\rho, d\varphi, d\theta)$ 也是順變向量空間裏的一組基。他們彼此雖然正交可是卻不見得是單元向量。要使他們變成單元向量必須除以逆變基向量 $\partial/\partial\rho$，$\partial/\partial\varphi$，$\partial/\partial\theta$ 之長度。試計算這些規範化的因子並由此計算 Hodge 運算在 $\wedge^1$ 以 $\wedge^2$ 上的表達式，其中我們使用 $(d\rho, d\varphi, d\theta)$ 做爲 $\wedge^1$ 的基，而使用：$(d\rho\wedge d\varphi, d\varphi\wedge d\theta, d\theta\wedge d\rho)$ 做爲 $\wedge^2$ 之基。

考慮圓柱面座標系統 r, θ, z 而進行同樣的考慮。

當然在 $\wedge^0 = R$ 之上 Hodge 運算 $*$ 把 1 映射到體積元素：$*1 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$。反之在 $\wedge^d = R$ 之上則反過來 $*(e_1\wedge\cdots\wedge e_d) = 1 \in \wedge^0$.

現在如果 V 中所用的二次形只是一個非退化的二次形但是卻不是正定也不是負定，那麼我們可以先把向量空間 V 的係數域由原先的實數域延拓成複數域。這時如果照以前所給的意義 $(e_1, \cdots\cdots, e_d)$ 爲一組正交單元基其中對 $1 \leq j \leq I$ 都有 $b(e_j, e_j) = -1$，因爲 I 是 b 的指標數。假設 $i^2 = -1$，則就 $k > I$，$1 \leq j \leq I$ 而言，$(ie_1, \ldots ie_I, e_{I+1}, \ldots, e_d)$ 是一組正交單元基滿足 $b(ie_j, ie_j) = b(e_k, e_k) = 1$。因此我們就可以按照前面已講過的方法來給出 Hodge 運算的定義。可是這時有可能 $*$ 會把一個實向量映射成一個複向量，就如下面的習題所示。

習題 2.22.2 在特殊相對論裏頭所考慮的時空連續區（space-time continuum）是個 R^4，其中以 x, y, z, t 爲座標而且在順變向量空間上具有一個其指標數爲一的二次形。就此二次形而言，(dx, dy, dz, idt) 構成一組正交單元基。因此這時的體積元素爲 $idx\wedge dy\wedge dz\wedge dt$。試使用

$\wedge^1$，$\wedge^2$，$\wedge^3$ 中的實基向量 $dx, dy, dz, dt, dx \wedge dy$ ……等等來計算其上的 Hodge 運算 $*$。

2.23 糾紐形

一個反對稱雙線性形之秩（rank）就是能完全表達這雙線性形之最少的向量個數。一個反對稱的（V 上的）雙線性形 b 可以被看如 $\wedge^2 V^*$ 中的元素。如果 b 能夠單用 ε^1，……，ε^r 來表達，則我們可以不管任何其他的 ε^i 而表成整個基的如下組合：

$$\begin{aligned} b &= b_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, && \text{其中 } b_{ij} = 0 \text{ 除非 } i, j \le r, \\ &= b_{ij}\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j, && \text{由於 } b_{ij} = -b_{ji}, \end{aligned}$$

其中除非 $i, j \leq r$，否則 $b_{ij} = 0$。另外由於 $b_{ij} = -b_{ji}$ 所以有第二個等式。因此在定義秩時把 b 表示成張量乘積或者表示成外積的寫法其實都無所謂。

現在假設 b 之秩為 r 而令 W 表示由 ε^1，……，ε^r 所生成的子空間，則 $b \in \wedge^2 W$。假設 k 為任何滿足 $2k > r$ 這條件之整數，則 b 自身的 k 重（k fold）外積：

$$\bigwedge^k b = b \wedge \cdots \wedge b \in \bigwedge^{2k} W,$$

必定等於零，而已經證明：

定理 2.23.1 假設 b 之秩為 r 而 $2k > r$，則有 $\wedge^k b = 0$。

現在假設 ε^1，……，ε^{2p} 為線性無關而我們取：

$$b = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + \cdots + \varepsilon^{2p-1} \wedge \varepsilon^{2p},$$

則 b 自身的 p 重外積為：

$$\bigwedge^p b = p!\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{2p} \neq 0. \tag{2.23.1}$$

因此根據定理 2.23.1 ，b 之秩 $r \geq 2p$ 。可是 b 是由這 $2p$ 個向量所表達出來，因此應該 $r \leq 2p$ ，而已經證明：

定理 2.23.2 假設 ε^1, ……, ε^{2p} 彼此線性無關，則反對稱雙線性形 $b = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + \cdots + \varepsilon^{2p-1} \wedge \varepsilon^{2p}$ 之秩正好為 $2p$ 。

習題 2.23.1 試證公式 (2.23.1) 爲眞。

繼續假設 b 之秩爲 r ，而 ε^1, ……, ε^r 滿足如下關係：

$$b = \sum_{i<j} a_{ij} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j,$$

其中 $a = a_{12} \neq 0$ 。則可將 b 就 ε^1 集項，再就 ε^2 集項……等等，而將其寫成：

$$\begin{aligned} b = & \ \varepsilon^1 \wedge \textstyle\sum_{1<j} a_{1j}\varepsilon^j + \varepsilon^2 \wedge \textstyle\sum_{2<j} a_{2j}\varepsilon^j + \\ & + \varepsilon^3 \wedge (\text{不含 } \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \text{ 之項}) + \cdots\cdots \\ = & \ \varepsilon^1 \wedge \varphi^1 + \varepsilon^2 \wedge \varphi^2 + \text{單含 } \varepsilon^3, \cdots\cdots, \varepsilon^r \text{ 之項} \end{aligned}$$

其中 φ^2 單含 ε^3, ……, ε^r 之項，而 $\varphi^1 = a\varepsilon^2 + \varphi^3$ ，其中 φ^3 也單含 ε^3, …, ε^r 之項。因此若取 $c = 1/a$ ，則 $c\varphi^1 - c\varphi^3 = \varepsilon^2$ ，而得：

$$\begin{aligned} b = & \ \varepsilon^1 \wedge \varphi^1 + c\varphi^1 \wedge \varphi^2 - c\varphi^3 \wedge \varphi^2 + \text{單含 } \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^r \text{ 之項} \\ = & \ (\varepsilon^1 - c\varphi^2) \wedge \varphi^1 + \text{單含 } \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^r \text{ 之項} \\ = & \ \alpha^1 \wedge \alpha^2 + b_1, \end{aligned}$$

其中 b_1 之秩爲 $r-2$ 。繼續使用這方法可得對於每個整數 k 滿足 $2k \leq r$ 的話，能將 b 寫成：

$$b = \alpha^1 \wedge \alpha^2 + \alpha^3 \wedge \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2k-1} \wedge \alpha^{2k} + b_k,$$

其中 b_k 之秩爲 $r-2k$ 。這樣一直做直到 $r-2k = 0$ 或者 1 。可是 $b_k \in \wedge^2 V^*$ 之秩不可能爲 1 ，因爲在 $\wedge^2 V^*$ 中能表爲單獨一個 $\alpha \in V^*$ 之組合

的元素只可能為 $\alpha \wedge \alpha = 0$ 之倍數。這樣已經大抵完成了下面的：

定理 2.23.2 假設 b 是一個反對稱的雙線性形其秩為 r，則如下事項成立：

(a) r 是個偶數而可寫成 $r = 2p$。

(b) 存在線性無關的元素 $\varepsilon^1, \cdots\cdots, \varepsilon^{2p}$ 使得：

$$b = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^{p+1} + \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^{p+2} + \cdots + \varepsilon^p \wedge \varepsilon^{2p}.$$

(c) $\wedge^{p+1} b = 0$ 而同時 $\wedge^p b \neq 0$。

(d) 當我們將 b 看成一個線性函數 $b_1 : V \to V^*$ 之時其像域為 $2p$ 維，而由 $\varepsilon^1, \cdots\cdots, \varepsilon^{2p}$ 所生成。

證明 全部除了(a)以外都已於前面論及。這兒只需證明(d)。將 $\{\varepsilon^i\}$ 擴充以成為 V^* 中的一組基而取 $\{e_i\}$ 為其於 V 中的對偶基。則得：

$$\begin{aligned} b_1 e_i &= (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^{p+1} + \cdots + \varepsilon^p \wedge \varepsilon^{2p})_1 e_i \\ &= \tfrac{1}{2}[\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^{p+1} - \varepsilon^{p+1} \otimes \varepsilon^1 + \cdots]_1 e_i \\ &= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\varepsilon^{i+p} & \text{若 } i \leq p \\ -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{i-p} & \text{若 } i > p \\ 0 & \text{若 } i > 2p. \end{cases} \end{aligned}$$

由 b_1 在一組基之上所取的值而生成的空間就是 b_1 之像域。因此這像域顯然由 $\varepsilon^1, \cdots\cdots, \varepsilon^{2p}$ 所生成。□

系 在基的任意變動之下一個反對稱的雙線性形之唯一的不變量就是這雙線性形之秩。此即，假設 b 與 c 均為反對稱的雙線性形，則在 V 中存在基 $\{e_i\}$ 及 $\{f_i\}$ 使得 $b(e_i, e_j) = c(f_i, f_j)$ 當且唯當 b 與 c 之秩相等。

一個具有極大秩之反對稱雙線性形稱為一個**糾紐形**(symplectic form)。因此當 d 為偶數時其秩為 d，而當 d 為奇數時其秩為 $d-1$。

對於一個糾紐形所取的一組**糾紐基**(symplectic basis)就是 V^* 中

可以將 b 表示成如下形狀：

$$b = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^{p+1} + \cdots + \varepsilon^p \wedge \varepsilon^{2p}.$$

的一組基 $\{\varepsilon^i\}$。

兩組斜紐基之間的轉換方陣必須滿足某些特定的關係。就像關於一個正定的二次形之兩組正交單元基之間的轉換方陣必須是一個正交方陣一樣。這兒所謂正交方陣就是滿足 $AA^* = I$ 的條件，其中 A^* 代表 A 之轉置方陣，而 I 自然是恒等方陣。

爲了要找出基之轉換方陣所滿足的關係，我們這兒要先引入一種方便的取和慣用法。注意這兒在基的轉換方陣之下所考慮反對稱雙線性形之正則形狀 $b = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^{i+p}$ 始終保持不變。我們讓下列各類的數碼在各自的領域中變化：

$$\begin{aligned} i, j &= 1, \ldots, p, \\ h, k &= p + 1, \ldots, 2p, \\ m, n &= 2p + 1, \ldots, d. \\ \alpha &= 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

對應於這些數碼我們能夠將基轉換方陣分解成如下的塊狀部分：

$$\begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & G \\ E & F & \end{pmatrix}, \qquad A = (a_i^j), \quad B = (b_i^k), \quad C = (c_h^j), \ \cdots\cdots \text{等等}$$

因此若新舊基分別爲 $\{\varphi^\alpha\}$，$\{\varepsilon^\alpha\}$，則其間的關係爲：

$$\begin{aligned} \varphi^j &= a_i^j \varepsilon^i + c_h^j \varepsilon^h + e_m^j \varepsilon^m, \\ \varphi^k &= b_i^k \varepsilon^i + d_h^k \varepsilon^h + f_m^k \varepsilon^m, \\ \varphi^n &= g_\alpha^n \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

可是如果我們使用新基時仍然保持 $b = \sum_{u=1}^{p} \varphi^u \wedge \varphi^{u+p}$，則必須

$$\begin{aligned}
b &= \sum_{u=1}^{p} (a_i^u \varepsilon^i + c_h^u \varepsilon^h + e_m^u \varepsilon^m) \wedge (b_j^{u+p} \varepsilon^j + d_k^{u+p} \varepsilon^k + f_n^{u+p} \varepsilon^n) \\
&= \sum_{u=1}^{p} [a_i^u b_j^{u+p}\, \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j + c_h^u d_k^{u+p}\, \varepsilon^h \wedge \varepsilon^k + e_m^u f_n^{u+p}\, \varepsilon^m \wedge \varepsilon^n \\
&\qquad + (a_i^u d_h^{u+p} - b_i^{u+p} c_h^u) \varepsilon^i \wedge \varepsilon^h + (a_i^u f_m^{u+p} - b_i^{u+p} e_m^u) \varepsilon^i \wedge \varepsilon^m \\
&\qquad + (c_h^u f_m^{u+p} - d_h^{u+p} e_m^u) \varepsilon^h \wedge \varepsilon^m + e_m^u f_n^{u+p} \varepsilon^m \wedge \varepsilon^n] \\
&= \sum_{u=1}^{p} \varepsilon^u \wedge \varepsilon^{u+p}.
\end{aligned}$$

將上式中 $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$，$i < j$ 項之係數取爲相等可得

$$\sum_{u=1}^{p} (a_i^u b_j^{u+p} - b_i^{u+p} a_j^u) = 0.$$

但是當 $i = j$ 時以及當 $j < i$ 時（由反對稱性）上式照樣也都成立，因此可以將其寫成矩陣的形式：

$$AB^* - BA^* = 0.$$

同樣藉著比較 $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^h, \varepsilon^i \wedge \varepsilon^m$ 以及 $\varepsilon^h \wedge \varepsilon^m$ 的係數可得如下的矩陣方程式:

$$\begin{aligned}
AD^* - BC^* &= I, \\
CD^* - DC^* &= 0, \\
AF^* - BE^* &= 0, \\
CF^* - DE^* &= 0.
\end{aligned}$$

由於 $(RS)^* = S^* R^*$ 我們立即可計算得：

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^* & -B^* \\ -C^* & A^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AD^* - BC^* & -AB^* + BA^* \\ CD^* - DC^* & -CB^* + DA^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

而知矩陣 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 之逆矩陣爲 $H^{-1} = \begin{pmatrix} D^* & -B^* \\ -C^* & A^* \end{pmatrix}$。此外我們

還有 $H\begin{pmatrix} F^* \\ -E^* \end{pmatrix}=0$ ，因此 $\begin{pmatrix} F^* \\ -E^* \end{pmatrix}=H^{-1}H\begin{pmatrix} F^* \\ -E^* \end{pmatrix}=0$ 。或即 $F^*=0$ ，$E^*=0$ ，也就是 $E=0$ ，$F=0$ 。

一個取形狀如 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的 $2p\times 2p$ 矩陣 H 如果其逆矩陣爲：

$\begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} D^* & -B^* \\ -C^* & A^* \end{pmatrix}$ ，其中 A,B,C,D 爲 $p\times p$ 的矩陣，則說 H 是個斜紐矩陣。

定理 2.23.3 能夠使得一個其秩爲 $2p$ 之反對稱雙線性形 b 之正則形狀 $b=\sum_{i=1}^{p}\varepsilon^i\wedge\varepsilon^{i+p}$ 保持不變的基轉換矩陣就是一個其形狀爲

$$\begin{pmatrix} H & \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

的矩陣，其中 H 是個 $2p\times 2p$ 的斜紐矩陣。

習題 2.23.2 試證斜紐矩陣之乘積以及斜紐矩陣之逆矩陣皆仍爲斜紐矩陣。請直接以計算證明之，也同時由基之變換而考慮之。

習題 2.23.3 一個複矩陣 $U=A+iB$（其中 A ，B 爲實矩陣）如果其逆矩陣可以表爲 $U^{-1}=U^*=A^*-iB^*$ ，則說 U 是個么正（unitary）矩陣。試證如果 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ 同時爲斜紐矩陣也爲正交矩陣，則必定 $A+iB$ 爲么正。反之，如果 $A+iB$ 爲么正矩陣，則必定 $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ 同時爲斜紐矩陣也爲正交矩陣。

第二章習題提示

2.1.1 這時性質(b)不見得成立，因為 $0(3,1)=(0\cdot3,1)=(0,1)\neq0$。

2.1.3 對於V中的元素(x,y)，其負元素$(-x,-y)$不在V中。

另外如果$a<0$，則$a(x,y)$就不在V中了，因此實係數的乘法運算根本沒能定義週全，因此V非為向量空間。

2.2.3 假設

$$a_1(v_1,0)+\cdots\cdots+a_l(v_l,0)+b_1(0,w_1)+\cdots\cdots+b_k(0,w_k)=0$$

則有

$$(a_1v_1+\cdots\cdots+a_lv_l\,,\,b_1w_1+\cdots\cdots+b_kw_k)=0$$

因此各別有

$$a_1v_1+\cdots\cdots+a_lv_l=0 \quad 以及 \quad b_1w_1+\cdots\cdots+b_kw_k=0$$

而必定有$a_i=0$，$b_j=0$因為$\{v_i\}$在V中，$\{w_j\}$在W中皆是線性無關的。這就證明$\{(v_i,0),(0,w_j)\}$在$V\times W$中為線性無關。

2.2.4 歸納法的起頭：當只考慮兩個指數函數$e^{\alpha x}$及$e^{\beta x}$，$\alpha\neq\beta$時，他們確實線性無關。因為假設有

$$ae^{\alpha x}+be^{\beta x}=0$$

加以微分可得

$$a\alpha e^{\alpha x}+b\beta e^{\beta x}=0$$

因此得到

$$a(\alpha-\beta)e^{\alpha x}=0$$

但是$\alpha\neq\beta$，又$e^{\alpha x}$始終不等於零，而只好$a=0$。又知$e^{\beta x}$也始終不為零，因此$b=0$。

2.3.1 $\delta^k_i\delta^i_k=\delta^k_1\delta^1_k+\cdots\cdots+\delta^k_d\delta^d_k=1+\cdots\cdots+1=d$

2.5.1 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，$\therefore f(0)=0$。

2.5.4 假設$f^{-1}\{0\}=\{0\}$，又設$f(v)=f(w)$，則有：

$$f(v-w)=f(v)-f(w)=0$$

所以$v-w=0$而知$v=w$，因此f為一對一。

2.6.1 $E^j_\beta e_i=\delta^j_i\bar{e}_\beta=\delta^j_i\delta^\alpha_\beta\ \bar{e}_\alpha$，這證明了線性映射$E^j_\beta$對於基$\{e_i\}$，$\{\bar{e}_\alpha\}$之矩陣表示為$(\delta^j_i\delta^\alpha_\beta)$。

2.8.1 例如取$\{e_i\}$，$\{\bar{e}_\alpha\}$分別代表V及W的基，對於任意雙線性映射f，就令$a_{i\alpha}=f(e_i,\bar{e}_\alpha)$。對任意$v=v^ie_i$，$w=w^\alpha\bar{e}_\alpha$我們有：

$$\begin{aligned}f(v,w)&=v^iw^\alpha f(e_i,\bar{e}_\alpha)\\&=v^iw^\alpha a_{i\alpha}\\&=(v^ia_{i\alpha})w^\alpha\end{aligned}$$

因此可以定義$\tau_\alpha:V\to R$為$\tau_\alpha(v)=v^ia_{i\alpha}$，定義$\theta_\alpha:W\to R$為$\theta_\alpha(w)=w^\alpha$，這些皆為線性映射，而有：

$$f(v,w)=\tau_\alpha(v)\theta_\alpha(w)$$

這就證明了$\tau\otimes\theta$全體可以生成$L(V,W;R)$。當V與W中有一個是一維向量空間之時就是可容許的特別情形，對於f存在一個τ及一個θ使得$f(v,w)=\tau(v)\theta(w)$。

2.11.1 對任意$\tau,\theta\in V^*$，$(v\otimes w)(\tau,\theta)=v(\tau)w(\theta)$，但是另方面$(w\otimes v)(\tau,\theta)=w(\tau)v(\theta)$，除非$v$與$w$線性相關，否則這兩個值是根本不相等的。

2.12.1 $\langle e_i,\varepsilon^j\rangle=\delta^j_i$，因此$\langle\ ,\ \rangle$的成分就是$\delta^j_i$。由定理2.12.3最後所給的公式可知：

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle_1\tau&=\delta^j_ib_j\varepsilon^i\\&=b_i\varepsilon^i\\&=\tau\\\langle\ ,\ \rangle_2v&=\delta^i_ja^je_i\\&=a^ie_i\\&=v\end{aligned}$$

可見這時$\langle\ ,\ \rangle_1$及$\langle\ ,\ \rangle_2$皆為恒等映射。

2.12.3 T^1_2型的張量可以解釋成$V^t\to V$的多重線性映射。

2.13.1 $A^1_1=2$，$A^1_2=A^2_1=0$；$A^1_3=A^3_1=1$，$A^2_2=3$，$A^2_3=A^3_2=-1$，$A^3_3=0$

$v = -e_1 + 2e_3$, $\therefore a^1 = -1$, $a^2 = 0$, $a^3 = 2$

$\tau = 5\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, $\therefore b_1 = 5$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$

(a) $A(\tau, v) = A(-e_1 + 2e_3, 5\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$ = 拆開計算 = 3

(b) $A_2 v = A^i_j a^j e_i = (-2+2)e_1 + (-2)e_2 + (-1)e_3$
$= -2e_2 - e_3$

(c) $A_1 \tau = A^i_j b_i \varepsilon^j = (10+1)\varepsilon^1 + (-6-1)\varepsilon^2 + (5+2)\varepsilon^3$
$= 11\varepsilon^1 - 7\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$

(d) 從 $\{e_i\}$ 到 $\{f_i\}$ 的轉換矩陣爲 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，因此可求得其逆矩陣應爲 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，而知 $\varphi^1 = \varepsilon^1$, $\varphi^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^3$; $\varphi^3 = \varepsilon^3$ 。

(e) 可表示：$e_1 = f_1 - \frac{1}{2}f_2$; $e_2 = \frac{1}{2}f_2$; $e_3 = \frac{1}{2}f_2 + f_3$

$\varepsilon^1 = \varphi^1$; $\varepsilon^2 = \varphi^1 + 2\varphi^2 - \varphi^3$; $\varepsilon^3 = \varphi^3$

所以 $v = -e_1 + 2e_3 = -f_1 + \frac{3}{2}f_2 + 2f_3$;

$\tau = 5\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 3\varphi^1 - 4\varphi^2 + 3\varphi^3$

(f) $B^1_1 = A(\varphi^1, f_1) = A(\varepsilon^1, e_1 + e_2) = A^1_1 + A^1_2 = 2$;

$B^1_2 = A(\varphi^1, f_2) = 2A^1_2 = 0$; $B^1_3 = A(\varphi^1, f_3) = 1$;

$B^2_1 = A(\varphi^2, f_1) = \frac{1}{2}$; $B^2_2 = A(\varphi^2, f_2) = 2$;

$B^2_3 = -2$; $B^3_1 = A(\varphi^3, f_1) = 0$; $B^3_2 = -2$; $B^3_3 = 1$

(g) $\det(A^{e\,i}{}_j) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$

$\det(A^{f\,i}{}_j) = \det(B^i_j) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\mathrm{tr}(A'^{i}_{j}) = 5$; $\mathrm{tr}(A''^{i}_{j}) = 5$

(b) $A(\tau, v) = A(3\varphi^1 - 4\varphi^2 + 3\varphi^3, -f_1 + \frac{3}{2}f_2 + 2f_3)$

$$= -3\cdot 2 + 6\cdot 1 + 4\cdot \frac{1}{2} - 6\cdot 2 - 8(-2)$$

$$+ \frac{9}{2}\cdot(-2) + 6\cdot 1$$

$$= 3$$

2.13.2 $A^i_k = A(\varphi^i, f_k) = A(b^i_j\varepsilon^j, a^l_k e_l) = b^i_j a^l_k A(\varepsilon^j, e_l) = b^i_j a^l_k A^j_l$；考慮新基 $f_1 = e_2$，$f_2 = e_1$，其他不變，則 $\varphi^1 = \varepsilon^2$，$\varphi^2 = \varepsilon^1$，其他不變。因此 $A^1_1 = A(\varphi^1, f_1) = A(\varepsilon^2, e_2) = A^2_2$。類似的基變換看出全部對角線上的項全都相等。接下來考慮基變換：

$$f_1 = e_1 - e_2$$
$$f_2 = e_1 + e_2$$

其餘不變，則有：

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\varphi^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

其餘不變，因此有

$$A^1_1 = A(\varphi^1, f_1) = A(\frac{1}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2, e_1 - e_2)$$

$$= \frac{1}{2}A^1_1 - \frac{1}{2}A^1_2 + \frac{1}{2}A^2_1 + \frac{1}{2}A^2_2$$

記得 $A^1_1 = A^2_2$，所以知道 $A^1_2 = A^2_1$。再由 $A^2_1 = A(\varphi^2, f_1)$ 可得：

$$-\frac{1}{2}A^1_2 + \frac{1}{2}A^2_1 = A^2_1$$

因此得知 $A^2_1 = A^1_2 = 0$。考慮類似的基變換，能證明所有非對角線項 $A^i_j = 0$。

2.13.3 例如設A為（1，0）型張量，則有：

$$\begin{aligned}\delta^i_j A^j &= A^i = A(\varphi^i)\\ &= A(b^i_j \varepsilon^j) = b^i_j A(\varepsilon^j)\\ &= b^i_j A^j\end{aligned}$$

因此$(b^i_j - \delta^i_j)A^j = 0$。但是$(b^i_j)$可以任意取，而知有$b^i_j$使得$\det(b^i_j - \varphi^i_j) \neq 0$，或即$(b^i_j - \delta^i_j)$非為奇異，因此必定$\{A^j = 0\}$而證得$A = 0$。其他的情形可以先收縮再考慮而得到證明。

2.14.3 設A, B, C為任意（1，1）型張量，α，β為任意實數，則有：

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr})^2 : L^1_1 \otimes L^1_1 \to R : (A, B) \to \mathrm{tr}^2(A, B)\\ = \mathrm{tr}\, A\, \mathrm{tr}\, B\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr})^2(A+B, C) &= \mathrm{tr}(A+B)\,\mathrm{tr}\, C\\ &= \mathrm{tr} A\, \mathrm{tr} C + \mathrm{tr} B\, \mathrm{tr}\, C\\ &= (\mathrm{tr})^2(A, C) + \mathrm{tr}^2(B, C)\\ (\mathrm{tr})^2(\alpha A, C) &= \mathrm{tr}(\alpha A)\,\mathrm{tr}\, C\\ &= \alpha\, \mathrm{tr} A\, \mathrm{tr} C\\ &= \alpha\, \mathrm{tr}^2(A, C)\end{aligned}$$

對於第二個因子亦然，故tr^2爲線性而爲二次不變量。

2.15.1 考慮基變換：$f_1 = e_1 + e_2$，$f_2 = e_2$；$\varphi^1 = \varepsilon^1$，$\varphi^2 = -\varepsilon^1 + \varepsilon^2$；則有：$\overline{A}^1_1 = A(\varphi^1, f_1) = A^1_1 + A^1_2$；$\overline{A}^1_2 = A^1_2$；$\overline{A}^2_1 = -A^1_1 - A^1_2 + A^2_1 + A^2_2 = -A^1_1 + A^2_2$；$\overline{A}^2_2 = -A^1_2 + A^2_2$。由條件$\overline{A}^1_2 = \overline{A}^2_1$所以$A^1_2 = A^2_2 - A^1_1$。

可是如果考慮$f_1 = e_1 - e_2$，$f_2 = e_2$；$\varphi^1 = \varepsilon^1$，$\varphi^2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^2$，則有：$\overline{A}^1_1 = A^1_1 - A^1_2$；$\overline{A}^1_2 = A^1_2$；$\overline{A}^2_1 = A^1_1 - A^1_2 + A^2_1 - A^2_2 = A^1_1 - A^2_2$；$\overline{A}^2_2 = A^1_2 + A^2_2$。由條件$\overline{A}^1_2 = \overline{A}^2_1$所以$A^1_2 = A^1_1 - A^2_2$。

換言之，已經證明$A^1_2 = -A^1_2$，所以必定$A^1_2 = A^2_1 = 0$。同樣對於任意基而言都有$\overline{A}^1_2 = \overline{A}^2_1$。因此：

$$0 = \overline{A}^2_1 = -A^1_1 + A^2_2 \quad \therefore A^1_1 = A^2_2 = \alpha$$

而證得$A = \alpha I$。

2.16.2 $A_{ijk}=\frac{1}{6}(A_{ijk}+A_{ikj}+A_{jik}+A_{jki}+A_{kij}+A_{kji})$

2.16.3 由於在 d 個指標中可以重複選取 r 個指標，因此其選法就相當於從 $d+r-1$ 個指標中選出 r 個不同的指標之選法，就是組合數

$C(d+r-1,r)=\dfrac{(d+r-1)!}{r!(d-1)!}$ 。

$$
\begin{aligned}
& s(d,r)+s(d+1,r-1) \\
&=C(d+r-1,r)+C(d+r-1,r-1) \\
&=\frac{(d+r-1)!}{r!(d-1)!}+\frac{(d+r-1)!}{(r-1)!d!} \\
&=\frac{(d+r)!}{r!d!} \\
&=C(d+r,r) \\
&=s(d+1,r)
\end{aligned}
$$

2.16.6 所有 $A_{111}=A_{222}=A_{333}=0$

所有 $A_{211}=A_{311}=A_{122}=A_{322}=A_{133}=A_{233}=0$

我們有六個獨立的：A_{112}，A_{113}，A_{221}，A_{223}，A_{331}，A_{332}

這時其他有六個 $A_{121}=-A_{112}$；$A_{131}=-A_{113}$，……，$A_{323}=-A_{332}$

最後考慮三個指標都不同，則有兩個獨立的 A_{123} 及 A_{231}

其他四個可表爲：$A_{132}=-A_{123}$；$A_{213}=-A_{231}$

$A_{321}=A_{123}+A_{231}$；$A_{312}=-A_{123}-A_{231}$

2.17.1 三個指標相同則 $A^{111}=-A^{111}$，所以 $A^{111}=0$

兩個指標相同：

(a) $A^{121}=-A^{121}$，$\therefore A^{121}=0$

(b) $A^{112}=-A^{211}=-A^{121}=0$

三個指標互異：

$A^{123}=-A^{321}=-A^{231}=A^{132}=A^{312}=-A^{213}=-A^{123}$

$\therefore A^{123}=0$

所以 $A=0$

2.17.3 不妨設 $\tau^r=a_1\tau^1+\cdots\cdots+a_{r-1}\tau^{r-1}$ 代入立即得證。

2.17.4 由(3)有 $A_{ikl j}+A_{ijlk}+A_{ijkl}=0$

由於 i，j，k，l 代表任意指標，就按秩序將其輪換三次得：

$$A_{jlik}+A_{jikl}+A_{jkli}=0$$
$$A_{kijl}+A_{kjli}+A_{klij}=0$$
$$A_{ljki}+A_{lkij}+A_{lijk}=0$$

將這四式相加，又使用性質(1)及(2)可得：

$$2A_{jlik}+2A_{iklj}=0$$

此即

$$A_{ikjl}=A_{jlik}$$

或即

$$A_{ijkl}=A_{klij}$$

而知(4)式成立。

至於(b)項則先已知若有兩個相同指標如下；則全爲零：$A_{1122}=-A_{1122}$ $\therefore A_{1122}=0$。再由$A(e_1,e_2,e_1,e_2)=0$，可得$A_{1221}=A_{1212}=0$。再考慮$A(e_1+e_2,e_3,e_1+e_2,e_3)=0$，但左邊拆開後有兩項爲零，因此得：$A_{1323}+A_{2313}=0$，而知$-A_{1332}=A_{1323}=0$。因此只要有兩個相同指標，則此成分必定爲零。最後考慮：

$$A(e_1+e_2,e_3,e_1+e_2,e_4)=0$$

拆開第一項及第三項，去掉等於零的兩項得：

$$A(e_1,e_3,e_2,e_4)+A(e_2,e_3,e_1,e_4)=0$$

或即$A_{1324}+A_{2314}=0$，$A_{1324}+A_{1423}=0$，$A_{1324}=A_{1432}$。由條件(3)有：

$$A_{1234}+A_{1342}+A_{1423}=0$$

可是據上面結果有：$A_{1342}=A_{1234}$，又另方面有：

$$A_{1423}=A_{1342}=A_{1234}$$

代入可得$3A_{1234}=0$，所以$A_{1234}=0$。這就證明了$A=0$。

2.17.5 (b) v及w若線性無關，則對任意t而言$tv+w\neq 0$。因此$B(tv+w,tv+w)>0$。但是左邊可展開成爲t的二次方程式，由於都沒有任何實根，所以判別式：

$$B(v,w)^2-B(v,v)B(w,w)<0$$

2.17.5 $A^{\cdots i\cdots i\cdots}=0$，$A^{\cdots i\cdots j\cdots}$項能與$A^{\cdots j\cdots i\cdots}$項互相抵消，所以 A_s中全部項或相抵消或爲零而使得$A_s=0$。

2.18.3 $A_s=\frac{1}{3}(e_1\otimes e_1\otimes e_2+e_1\otimes e_2\otimes e_1+e_2\otimes e_1\otimes e_1+e_3\otimes e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_3\otimes e_1+e_1\otimes e_1\otimes e_3)$

$A_a=0$

2.18.5 考慮這三個向量之外積，結果爲零。

2.18.6 取一組以v爲其e_1的基$\{e_i\}$，則f可以表成：

$$f=e_1\wedge g+h$$

其中$g\in\wedge^{p-1}V$，又$h\in\wedge^pV$，而且這個h若不爲零，則是不含e_1的其餘p個e_i的外積項之和，因此必定$e_1\wedge h\neq 0$。

若$h\neq 0$，則$e_1\wedge f=e_1\wedge h\neq 0$。因此若$e_1\wedge f=0$則必定要求$h=0$，或即$f=e_1\wedge g$。

2.18.7 設$v_i=\sum_{j=1}^{p}A_{ij}e_j+\sum_{\alpha=p+1}^{d}A_{i\alpha}e_\alpha$，則有：

$$0=\sum_{i=1}^{p}e_i\wedge v_i=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(A_{ij}-A_{ji})e_i\wedge e_j$$

$$+\sum_{1\leqslant i\leqslant p}\ \sum_{p+1\leqslant\alpha\leqslant d}A_{i\alpha}e_i\wedge e_\alpha$$

所有這些$\wedge^2V$中的元素皆彼此線性無關，因此全部係數都必須爲零，而得到結論$A_{i\alpha}=0$，$A_{ij}=A_{ji}$。

2.18.8 若V爲三維，設e_1，e_2，e_3爲一組基，則任意的$\wedge^2V$中的元素$Ae_1\wedge e_2+Be_1\wedge e_3+Ce_2\wedge e_3$皆可以改而表成

$$e_1\wedge(Ae_2+Be_3)+\frac{C}{B}e_2\wedge(Ae_2+Be_3)$$

或即表成

$$\left(e_1+\frac{C}{B}e_2\right)\wedge(Ae_2+Be_3)$$

因此就是一個可分解的元素。$\wedge^3 V$ 只爲一維，所以可分解，而$\wedge^0 V$，$\wedge^1 V$按定義皆可分解。

現在假設V爲四維而$\{e_i\}$爲一組基。假設存在兩個向量$v=v^j e_j$，$w=w^i e_i$能夠滿足$e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4=v\wedge w$，則將右邊展開而與左邊比較，可得如下六個條件：

$$v^1w^2-v^2w^1=1\ ;\ v^1w^3-v^3w^1=0$$
$$v^1w^4-v^4w^1=0\ ;\ v^2w^3-v^3w^2=0$$
$$v^2w^4-v^4w^2=0\ ;\ v^3w^4-v^4w^3=1$$

由條件(3)及(5)可得：

$$v^1w^4w^2=v^4w^1w^2=v^2w^4w^1$$

所以：$(v^1w^2-v^2w^1)w^4=0$，加入條件(1)可得$w^4=0$。同樣由條件(4)、(5)及(6)可得$(v^3w^4-v^4w^3)w^2=0$，所以$w^2=0$。

這樣原來的六個條件就變成：

$$-v^2w^1=1\ ;\ v^1w^3-v^3w^1=0\ ;\ v^4w^1=0$$
$$v^2w^3=0\ ;\ -v^4w^3=1$$

由條件(1)，$w^1\neq 0$，因此由條件(3)知$v^4=0$，這就與條件(5)相抵觸。可見這些條件是不一致的。因此$e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4$不可能分解。

2.18.9 若$A=v\wedge w$可分解，則當然$A\wedge A=0$。反之若$A\wedge A=0$，而A爲不可分解，則由2.18.8至少存在四個線性無關的向量f_1, f_2, f_3, f_4使得$A=f_1\wedge f_2+f_3\wedge f_4+B$，其中$B$之任何項都不含$f_1$或$f_3$。因此在$A\wedge A$中，涉及$f_1\wedge f_2\wedge f_3\wedge f_4$的只有$2f_1\wedge f_2\wedge f_3\wedge f_4$，因此$A\wedge A\neq 0$，矛盾。

對於一組基$\{e_i\}$，將A表成$A=A^{ij}e_i\wedge e_j$，實際計算A與A之外積，並集項，則得出$A^{12}A^{34}-A^{13}A^{24}+A^{14}A^{23}=0$，……

2.18.11 $A\in\wedge^p V$爲可分解當且唯當

$$A^{i_1\cdots i_{p-1}j_1}A^{j_2\cdots j_{p+1}}-A^{i_1\cdots i_{p-1}j_2}\check{A}^{j_1j_3\cdots j_{p+1}}+\cdots\cdots+(-1)^pA^{i_1\cdots i_{p-1}j_{p+1}}A^{j_1\cdots j_p}=0$$

2.18.14 由$v\wedge w=x\wedge y$，所以v，w與x，y生成同一個子空間而有$x=av+bw$，$y=cv+dw$，其中$ad-bc=1$。

B只於特別$B(v,w,v,w)$時具有反對稱性，一般的情形並沒有指明。

2.18.15 若 $\{e_i\}$ 是 V 上的一組基 $\{\varepsilon^i\}$ 爲其對偶基，則 $\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\}$ 爲 T_0^2 中之一組基，而 $\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\varepsilon^{j_2}\}$ 爲 T_2^2 中的一組基

$$S(e_{i_1}\otimes e_{i_2})=\frac{1}{2}(e_{i_1}\otimes e_{i_2}+e_{i_2}\otimes e_{i_1})$$

$$A(e_{i_1}\otimes e_{i_2})=\frac{1}{2}(e_{i_1}\otimes e_{i_2}-e_{i_2}\otimes e_{i_1})$$

所以

$$S_{j_1j_2}^{i_1i_2}=\frac{1}{2}(\delta_{i_1}^{j_1}\delta_{i_2}^{j_2}+\delta_{i_2}^{j_1}\delta_{i_1}^{j_2})$$

$$A_{j_1j_2}^{i_1i_2}=\frac{1}{2}(\delta_{i_1}^{j_1}\delta_{i_2}^{j_2}-\delta_{i_2}^{j_1}\delta_{i_1}^{j_2})$$

這種寫法對每一組基皆相同。

2.19.3 設 $\{e_i\}$，$\{\varepsilon^i\}$ 爲一組對偶基，則有 $A^*\varepsilon^i=A^{*i}_{\;j}\varepsilon^j=A^i_j\varepsilon^j$，或即 $A^{*i}_{\;j}=A^i_j$，因爲

$$\begin{array}{c}\langle e_k, A^*\varepsilon^i\rangle=\langle e_k, A^{*i}_{\;j}\varepsilon^j\rangle=A^{*i}_{\;j}\delta^j_k=A^{*i}_{\;k}\\ \|\\ \langle Ae_k, \varepsilon^i\rangle=\langle A^l_ke_l, \varepsilon^i\rangle=A^l_k\delta^i_l=A^i_k\end{array}$$

所以可知 $\det A^*=\det A$。注意我們在寫 A^* 的矩陣表示時，已經將行與列加以轉置了。

2.20.1 $\bar{b}_{ij}=b(f_i, f_j)=b(a^k_ie_k, a^l_je_l)=a^k_ia^l_jb(e_k, e_l)$
$=a^k_ia^l_jb_{kl}$

因此 $\det(\bar{b}_{ij})=(\det(a^j_i))^2\det(b_{ij})$

2.20.2 取 $(b_{ij})=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，則 $\det(b_{ij})=-2\neq 0$，但是卻有:

$$(b^s_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad (b^a_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

，兩者皆爲退化矩陣。

2.21.2 $q(v)\geq 0$ 對所有 v 成立。但是若 q 非退化，則若 $v\neq 0$，則 $q(v)\neq 0$，因此就必 $q(v)>0$，而爲正定。

2.21.3 (b) 設W爲等方子空間，v，w爲其中任意兩元素，則$v+w\in W$，因此

$$\begin{aligned} 0 &= b(v+w,\ v+w) \\ &= 2b(v,w) \end{aligned}$$

或即v與w必定互相垂直。就基$\{e_i\}$而言，其a_i爲正的個數與其a_i爲負的個數中較小的那數記爲p，則有：

$$d = 2p + |s| + \dim N$$

以e_1，……，e_p記其a_i爲正的p個基向量，以f_1，……，f_p記其a_i爲負的p個基向量，我們能用e_1+f_1，……，e_p+f_p來生成一個p維的等方子空間W。由(a)$W+N$爲一個極大的等方子空間，其維數爲

$$p + \dim N = \frac{1}{2}(d - |s| + \dim N)$$

2.22.1 由$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$；$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$；$z=\rho\cos\varphi$可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho} &= \sin\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} &= \rho\cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} - \rho\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= -\rho\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\sin\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

因此 $\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\right| = 1$，$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\right| = \rho$，$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right| = \rho\sin\varphi$。而知$\left(d\rho,\ \frac{1}{\rho}d\varphi,\ \frac{1}{\rho\sin\varphi}d\theta\right)$爲$\wedge^1$中之正交單元基。當然就有：

$$\left(\frac{1}{\rho}d\rho\wedge d\varphi,\ \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}d\varphi\wedge d\theta,\ \frac{1}{\rho\sin\varphi}d\theta\wedge d\rho\right)$$

爲$\wedge^2$中之正交單元基，因此在$*$之下有：

$$*(d\rho) = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}d\varphi\wedge d\theta$$

$$*(d\varphi)=\frac{1}{\sin\varphi}d\theta\wedge d\rho$$

$$*(d\theta)=\sin\varphi d\rho\wedge d\varphi$$

2.22.2 $*\alpha=i\alpha dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt$;

$*dx=idy\wedge dz\wedge dt$; $*dy=idz\wedge dt\wedge dx$;

$*dz=idt\wedge dx\wedge dy$; $*dt=-idx\wedge dy\wedge dz$

$*(dx\wedge dy)=idz\wedge dt$; $*(dx\wedge dz)=-idy\wedge dt$;

$*(dx\wedge dt)=-idy\wedge dz$; $*(dy\wedge dz)=idx\wedge dt$;

$*(dy\wedge dt)=idx\wedge dz$; $*(dz\wedge dt)=-idx\wedge dy$

2.23.3 U為么正矩陣的條件是：

$$\begin{aligned}I=UU^*&=(A+iB)(A^*-iB^*)\\&=(AA^*+BB^*)i(AB^*-BA^*)\end{aligned}$$

所以 $AA^*+BB^*=I$; $AB^*BA^*=0$

設 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}$ 則$H^*=\begin{pmatrix}A^* & -B^*\\ B^* & A^*\end{pmatrix}$

而H為正交矩陣的條件為$HH^*=I$，或即$AA^*+BB^*=I$，$-AB^*+BA^*=0$。而H為斜紐矩陣之條件也完全相同。

第 三 章

流形上的張量分析

3.1 向量場

設E爲流形M之子集合。所謂E上的一個向量場X意指E上的一個映射，對於每點$m\in E$就指定了一個在m點的向量，因此$X(m)\in M_m$。E就叫做X的定義域，而當然X的像域落在M之切束TM之中，如第1.8節之定義。

假設U是一個座標鄰域，其中以x^i爲局部座標，則根據定理1.7.1在每點$m\in U$，這些$\partial_i(m)$都構成切空間M_m中的一組基。因此若$m\in E$，則存在實數X^i_m，就是$X(m)$的成分，使得$X(m)=(X^i m)\partial_i(m)$。當我們容許$m$在$E\cap U$中變動時，我們就得出定義於$E\cap U$上的$d$個實值的函數$X^i$。他們稱爲$X$對於座標系統$x^i$的成分。

假設V是另外一個座標鄰域，其中以y^i爲局部座標。如果以Y^i來代表向量場X對於座標y^i的成分，則在$E\cap U\cap V$上，根據公式(1.7.1)有關基的轉換可得：

$$Y^i = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

假設f是個定義於M中開子集合W上的實值C^∞函數，則Xf是個定義於$W\cap E$之上的實值函數定義如下：

$$(Xf)m = X(m)f\ ,\ m\in W\cap E$$

就如同單獨一個切向量被定義成一個運算把C^∞函數映射成實數，照樣向量場也可以直接被定義成作用於C^∞函數以得到實值函數的運算。當然這種運算必須滿足下面兩條件：

(a) $X(af+bg)=aXf+bXg,$
(b) $X(fg)=(Xf)g+fXg.$

這兒的條件(b)實際上比切向量所滿足的第二條件來得更簡單，因爲這時式子右邊所牽涉的是函數的乘積與和，而不是函數值之乘積與和。可是一般而言函數 Xf 不見得爲 C^∞ 函數，甚至 E 也不見得是個開子集，因此可微分性的定義有問題。

在 $U\cap W\cap E$ 上 Xf 可以寫成：$Xf=X^i\partial_i f$。

向量場 X 之定義中，如果其定義域 E 爲開子集而且如果對於每個 C^∞ 函數 f 我們都要求 Xf 也必定是個 C^∞ 函數，則說這個向量場 X 是個 C^∞，或即平滑的向量場。

由於 X 的成分爲 $X^i=Xx^i$，則若 X 爲 C^∞，必定所有成分 X^i 皆爲 C^∞，因爲座標函數 x^i 是單項式當然爲 C^∞ 函數之故。反之如果對於任意座標系統 x^i 而言，向量場 X 之成分 $X^i=Xx^i$ 皆爲 C^∞ 函數，則必定 X 爲 C^∞。事實上假設 f 是個定義於 W 之上的 C^∞ 函數，則對每一點 $m\in W$ 存在一個座標系統 x^i 其座標鄰域 U 包含 m 點。這時在 $U\cap W\cap E$ 中 Xf 的表達式爲 $X^i\partial_i f$，按假設這是 C^∞ 函數之乘積再取和，因此當然應該是個 C^∞ 函數。這證明了 Xf 在每點附近都爲 C^∞，因此 Xf 本身是個 C^∞ 函數，而已經證明：

定理 3.1.1 一個向量場 X 爲 C^∞ 的充要條件爲對於每個座標系統 x^i，X 對此座標系統之成分 $X^i=Xx^i$ 均爲 C^∞ 函數。

我們以前爲 ∂_i 取名爲座標向量場。由於 ∂_i 顯然是 C^∞ 向量場，所以這種命名法跟現在的定義與符號相符合。

在 m 點給定一個切向量 t，我們可以在 m 點選局部座標而使得 t 可表成 $t=a^i\partial_i(m)$，其中 $a^i\in R$。因此如果將 a^i 看成常數函數，則可將 t 看成 C^∞ 向量場 $X=a^i\partial_i$ 在 m 點的值。尤有進者，假設 $g:M\to R$ 是個 C^∞ 函數滿足 $gm=1$ 又 g 在 m 的一個鄰域 W 之外恒等於零，其中 W 被包含於所考慮的座標鄰域 U 之中（參考習題 1.5.2 (b)），則可以定義：

$$Y = \begin{cases} gX & \text{在}W\text{上} \\ 0 & \text{在}W\text{外} \end{cases}$$

這樣的Y是個C^∞向量場，定義在整個M之上而且$Y(m) = t$ 。

一個C^∞向量場Z如果在m點有定義而且$Z(m) = t$，則說Z是$t \in M_m$的C^∞延拓。因此前段所論到的向量場X與Y均為t的C^∞延拓。

定理 3.1.2 假設$t \in M_m$，則必定存在C^∞延拓把t延拓成一個在M上的C^∞向量場。

習題 3.1.1 假設U是局部座標x^i的座標鄰域，而V為y^i的座標鄰域，又假設在$U \cap V$之上 $\partial/\partial x^i = \partial/\partial y^i$, $i = 1, \ldots, d$ 。假設$U \cap V$為弧線連通（參看 0.13節定義），試證在$U \cap V$之上$y^i = x^i - a^i$，其中a^i為常數。另方面試用圓圈或環面上之座標實例來說明若是$U \cap V$不連通，那麼$y^i - x^i$ 在$U \cap V$之不同的連通成分中可能具有不相同的差值。

習題 3.1.2 假設X與Y為C^∞向量場而f為C^∞函數，則可以將X作用於C^∞函數Yf而得出一個C^∞函數XYf。試證運算$XY: f \to XYf$ 之座標表示是一個二次的偏微分運算

$$XY = F^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + G^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

若X，Y的成分分別為$X^i = Xx^i$，$Y^i = Yx^i$，試計算上面的係數F^{ij}及G^i，將其用X^i，Y^i表示出來。

習題 3.1.3 跟單獨一個切向量的情形相反，試舉例說明一個C^∞向量場X不見得能夠C^∞延拓到整個流形M。此即不一定存在定義於整個M上的C^∞向量場Z使得在X之定義域V中的每一點m皆有$Z(m) = X(m)$。（提示：選V使得在M中存在某點能從V中幾個不同的部分來趨近。而定義V上的向量場X使得隨著不同的部分趨近其極限互不相同）。

3.2 張量場

對於每一類型（r，s）的張量以及每一點$m \in M$，我們總可以在M_m上取一個相應的張量空間M_{ms}^{r}。固定（r，s）而讓m在M中變動時所得到張量空間全體的集合稱爲M上屬於（r，s）型之**張量束**（tensor bundle），而記爲T_s^rM。因此：

$$T_s^rM = \bigcup_{m \in M} M_{ms}^{r}.$$

特別的張量束爲切束$TM = T_0^1M$，**係數束**（scalar bundle）T_0^0M，以及餘切束$T_1^0M = T^*M$。T_1^0M的另外名稱是M上之**可微形束**（bundle of differentials）。如果M是某機械系統之**狀位空間**（configuration space），則T_1^0M也常叫做M的**相空間**（phase space）。至於係數束T_0^0M則可看如$M \times R$，因爲對任意向量空間V，其$V_0^0 = R$。

（r，s）型的張量場T是一個映射$T: E \to T_s^rM$，其中T的定義域E是M中的一個子集合。對於E中每點m，都有$T(m) \in M_{ms}^{r}$。

當$r = 1$，$s = 0$時，這個張量場就是上節已講過的向量場。

當$r = s = 0$時，這個（0，0）型的張量場就是一個實値的函數。

如果f是$E \subset M$上的C^∞函數，則對於每點$m \in E$，

$$df_m \in M_m^* = M_{m1}^{0}.$$

可見f的微分形$df: E \to T_1^0M$是一個（0，1）型的張量場。

如果張量場T在每點m之値$T(m)$都是一個具有對稱性的張量，則說T是對稱的。同樣也可定義反對稱的張量場。

假設T是（r，s）型的張量場。假設$\theta_1, \ldots, \theta_r$爲（0，1）型的張量場，又$X_1, \ldots, X_s$爲向量場，則在所有這些$r + s + 1$個定義域之交集上我們可以定義如下的實値函數：

$$T(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)m = T(m)(\theta_1(m), \ldots, \theta_r(m), X_1(m), \ldots, X_s(m)).$$

特別T對於座標系統x^i之成分爲下面這d^{r+s}個實値的函數：

$$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = T(dx^{i_1},\ldots,dx^{i_r},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_s}).$$

把類似於定理3.1.1的結果拿來當做定義，我們可以說一個張量場T為C^∞如果T所有的成分皆為C^∞函數。一個（0，1）型的張量場如果也是C^∞的話就特別叫做單微分形或pfaffian形，或簡稱單形。類似於向量場的性質，我們也有如下的：

定理 3.2.1 一個（r，s）型的張量場T為C^∞當且唯當對於所有（C^∞的）微分形 $\theta_1,\ldots,\theta_r$ 以及C^∞的向量場 $X_1,\ldots,X_s$，我們的函數 $T(\theta_1,\ldots,\theta_r, X_1,\ldots,X_s)$ 皆為C^∞函數。

當遇到一個微分形作用於一個向量場而給出實值函數時，我們沿用對稱的寫法，如同對於單獨一個向量與餘向量之時所用的符號。因此如果X是個向量場而θ是個微分形，則以$\langle X, \theta\rangle$來代表$\theta(X)$這個M上的實值函數。

如果f是個C^∞的實值函數，則df是個微分形。可是反過來並不見得任何隨便一個微分形都可以表成某個C^∞函數f之df。事實上，如果x^i為一組局部座標，則df之座標表示可以寫成：

$$df = \partial_i f\, dx^i$$

因此df的成分θ_i必須滿足如下的微分方程式：

$$\partial_j\theta_i = \partial_i\theta_j \tag{3.2.1}$$

這是不管使用那一種局部座標都必須成立的。但是另方面，如果U是x^i的座標鄰域，我們可以在U上定義一個微分形為$\tau = x^1dx^2$。這個微分形的成分為$\tau_i = \delta_{i2}x^1$，因此得到：

$$\partial_2\tau_1 = \partial_2 0 = 0,$$

可是卻有：

$$\partial_1\tau_2 = \partial_1 x^1 = 1.$$

因此不可能存在任何函數 f 使得 $\tau = df$ 。

當我們將一個張量場 T 看成向量場及微分形之多重線性函數時，就每一個變數而言對於係數函數皆滿足線性的性質：

$$T(\ldots, fX, \ldots) = fT(\ldots, X, \ldots). \tag{3.2.2}$$

另外一個可以從 (3.2.2)式導引出來的性質就是如果在某一點 m ，做爲變數的向量場或微分形在該點爲零，則必定整個向量場函數也在該點爲零，此即：

$$\text{倘若} X(m) = 0 \text{ ，則必定 } T(\ldots, X, \ldots)m = 0. \tag{3.2.3}$$

事實上，表成座標時 $X = f^i \partial_i$ ，其中 $f^i m = 0$ 對每個 i 成立，因此

$$T(\ldots, X, \ldots)m = (f^i m)T(\ldots, \partial_i, \ldots)m = 0$$

不僅如此一個張量場就某些向量場及微分形之上取值時，其值只與這些向量場及微分形的成分有關，而跟這些成分的導數無關。換言之，如果兩組向量場及微分形之值在 m 完全相同，則 T 在這兩組向量場及微分形所取的函數在 m 點的值就完全相同，此即：若 $\theta_\alpha(m) = \tau_\alpha(m)$ 又 $X_\beta(m) = Y_\beta(m)$ ，則有：

$$T(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)m = T(\tau_1, \ldots, \tau_r, Y_1, \ldots, Y_s)m. \tag{3.2.4}$$

習題 3.2.1 假設 T 是個函數，對於 r 個微分形及 s 個 C^∞ 向量場就指定成一個 C^∞ 的實值函數滿足如下條件：

(a) 對常數係數 T 爲多重線性：$T(\ldots, aX, \ldots) = aT(\ldots, X, \ldots)$

(b) 對每個變數加法可拆開：$T(\ldots, X + Y, \ldots) = T(\ldots, X, \ldots) + T(\ldots, Y, \ldots)$.

試證明這樣的 T 若還滿足 (3.2.2) 式、(3.2.3) 式或 (3.2.4) 式當中隨便一個條件，則這 T 就是一個張量場。

習題 3.2.2 取 f 爲某一非爲常數的固定 C^∞ 函數。對於任意 C^∞ 向量場

X,Y 定義 $T(X,Y)f=XYf$。試證 T 滿足習題 3.2.1 中的條件(a)以及(b),可是證明這個 T 却非爲張量場。

3.3 黎曼測距

一個對稱的(0,2)型的 C^∞ 張量場如果不退化,而且在 M 中每一點其指標數(index)都保持相同,則這張量場就叫做一個半黎曼測距(semi-riemannian metric,或 pseudo-riemannian)。如果這張量場在每點皆爲正定的,那麼就叫做黎曼測距。如果其指標數正好是 1 或者 $d-1$,則就叫做勞倫茲測距。如果一個流形上給定了這麼一個張量場,那麼按情形這流形就稱爲一個半黎曼,黎曼或勞倫茲流形。

如果流形是連通的,則其測距的指標數自然會保持爲常數而不需額外要求。因爲當我們沿著一條連續曲線移動時,一個 C^∞ 的對稱(0,2)型張量場的指標數當然不可能從某值跳到另外值,除非這曲線遭遇了一個奇異點,在這點我們的雙線性形變爲退化。但由假設這情形不可能發生。

在一個給定的流形上可以存在無窮多個不同的黎曼測距。如果 g 爲半黎曼測距而 f 爲一個正值的 C^∞ 函數,則顯然 fg 也是一個半黎曼測距,其指標數與 g 者相同。可見若有一個就立即可得無窮多個。

可是另方面來講,一個其指標數爲 $k\neq 0$ 或 d 的半黎曼測距之存在性就得取決於這流形之拓樸結構。例如,在所有緊緻曲面中,只有環面與 Klein 瓶之上才可能存在有勞倫茲測距。特別就球面 s^2 而言,其中只可能存在具正定性或負定性的半黎曼測距。奇維數的流形之上總是會有勞倫茲測距存在。一般而言牽涉到一個給定指標數之測距的存在性的拓樸性質研究起來非常難,就所遇到的各種實例而言,我們也不見得能清楚其涉及的拓樸性質。例如要一直等到 1950 年代才搞清楚對於各種球面 S^n 而言,那一些指標數的測距有可能存在。如果所取的流形爲可平行化的(parallelizable)流形,則各種指標數的測距都能存在,請參閱本章附錄 3B。

3.4 積分曲線

假設 X 是定義於 $E\subset M$ 之上的向量場,如果一條曲線 γ 之像域被包含

於E中，而且就γ之定義域中的每一點s，此曲線的切向量滿足$\gamma_* s = X(\gamma s)$，則說γ是X的積分曲線。如果$\gamma 0 = m$，則說這曲線由m點出發。注意一條曲線得以成爲**積分曲線**(integral curve)不只與這曲線之點集(γ之像域)有關，而且也跟γ之參數化表示有關。這時所容許使用的各種參數化表示是相當受到限制的，這就是下面的：

定理 3.4.1 給定一個無處爲零的向量場X，假設γ與τ爲其積分曲線而且兩者具有同一像域，則存在一個常數c使得對於所有τ之定義域中的s都有$\tau s = \gamma(s+c)$。反之，如果γ是積分曲線而τ滿足$\tau s = \gamma(s+c)$，其中c是隨便一個常數，則τ必定也是一條積分曲線。換言之，將一條積分曲線重新給出一個參數化表示，則所得曲線仍舊是積分曲線的充要條件爲這個新參數化只不過是變數的平移。

證明 假設$f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$給出新的參數化函數，而使得：$\tau = \gamma\circ f$，此即對所有$a<s<b$都有$\tau s = \gamma(fs)$。則根據連鎖法則有：$\tau_* s = (f's)\gamma_*(fs)$。因此如果對所有$a<s<b$及$\alpha<t<\beta$都有$\tau_* s = X(\tau s)$及$\gamma_* t = X(\gamma t)$，則得$f's = 1$。因此存在常數$c$使得$fs = s + c$。反之，若$fs = s + c$，則$f's = 1$，因此$\tau_* s = \gamma_*(fs)$。□

系 只要指明在某點某積分曲線之值，則這積分曲線的參數化表示就已完全決定。

證明 當X無處爲零時，由定理立即得出本結果。可是如果在某點向量場爲零，則經過此點的積分曲線只不過是一條常數曲線：$\gamma t = m$，對所有t成立。一點所表示的常數曲線在重新參數化之下完全不變，因此當然由其在某點之值所完全決定。□

使用局部座標系統，則尋求積分曲線的問題可以化簡成處理一組一次微分方程式的問題。假設在U上的座標爲x^i，則可寫成$X = X^i \partial_i$，其中X^i爲定義於$E\subset U$之上的實值函數。而有：

$$\gamma_* = \frac{d(x^i \circ \gamma)}{du}(\partial_i \circ \gamma),$$
$$X \circ \gamma = X^i \circ \gamma(\partial_i \circ \gamma).$$

由於 ∂_i 在每點皆構成一組基，因此 γ 爲 X 之積分曲線的條件可寫爲：$d(x^i \circ \gamma)/du = X^i \circ \gamma$ 。γ 在 U 中的部分是由函數 $g^i = x^i \circ \gamma$ 來決定的。X 的成分 X^i 在 U 中可以表示成實值的函數 F^i 定義在 R^d 的某子集上，而可寫成 $X^i = F^i(x^1, \ldots, x^d)$ 。因此得到：

定理 3.4.2 一條曲線 γ 是 X 的積分曲線的充要條件是對於每個座標系統而言，γ 的座標表示 g^i 以及 X 的座標表示 F^i 之間滿足如下的微分方程式關係：

$$\frac{dg^i}{du} = F^i(g^1, \ldots, g^d). \tag{3.4.1}$$

有關積分曲線之存在及唯一性的定理都是建基於 R^d 上這種常微分方程式系統之解相應的存在及唯一性定理。因此有關積分曲線的計算都需要運用解這種微分方程的技巧。如果所考慮向量場之定義域不能被包含在單獨一個座標鄰域之中，則必須就每個所牽涉到的座標鄰域裏求得解，然後再把這些解就其重疊部分適當的搭配起來。首先我們來引述一個有關常微分方程組之解的存在及唯一性定理。讀者不妨參考 D. Greenspan , Theory and Solution of Ordinary Differential Equations ，第 85 頁，定理 5.5 。這兒就不給任何證明了。

基本的存在及唯一性定理： 考慮 R^d 中的閉方塊 U ：$\Sigma_i |u^i - a^i| \leq b$ ，其中 $b > 0$ 。假設 F^i 在 U 上爲 C^∞ 函數，而令 K 爲 $\Sigma_i |F^i|$ 之值在 U 中的上界 (upper bound) 。則存在唯一的一組函數 g^i 定義於 $|u - c| < b/K$ 之上而且爲 C^∞，又能滿足微分方程式 (3.4.1) 以及始值條件 $g^i c = a^i$ 。

定理 3.4.1 假設X是個定義於$E\subset M$之上的C^{∞}向量場，而$m\in E$，$c\in R$。則存在一個正數a以及唯一的一條X的積分曲線γ定義於$|u-c|\leq a$之上滿足$\gamma c=m$。

這兒所謂唯一的意思是指：倘若τ也是一條定義於$|u-c|\leq a'$之上X的積分曲線，滿足$\tau c=m$，則必定在一個更小的區間裏γ與τ彼此重合。

證明 像E這樣的開子集能包含基本定理裏頭所提到的那種閉座標方塊，其中以任意點m爲其中心。現在就把中心放在以a^i爲座標的那點。我們可以取$\Sigma_i|F^i|$在$\Sigma_i|u^i-a^i|\leq b$之上的極大値來做爲其上界K。注意這個極大値根據定理0.14.3是存在的，因爲這個和是連續函數，而閉方塊是個緊緻集合。□

定理3.4.1並沒有完全用到基本存在及唯一性定理的全部條件。另外我們也不特別指明這曲線所定義之區間的大小。事實上其長度a可能會隨著點m而有所不同，而特別可能存在一序列的點$\{m_i\}$使得其對應的序列$\{a_i\}$之極限會趨近於零。當我們對積分曲線所通過的範圍進一步加入緊緻性的條件時，我們就可以使用基本定理裏頭所給之特別定義域區間的估計式來證明：或者一條積分曲線無窮延伸，或者這曲線通到這緊緻區域的範圍之外。下面這引理使我們得以將基本定理之條件調整以適應緊緻集合的情形。

引理 3.4.1 假設C是流形M中的一個緊緻集合。則存在有限個座標系統，其中每個的像域都能包含閉方塊$\Sigma_i|u^i|\leq 2$，而且C中的每點都可以被包含在以開方塊$\Sigma_i|u^i|<1$爲其映像的一個或多個座標鄰域之中。

證明 在每一點$m\in C$存在一個座標系統(x^i)滿足$x^i m=0$這座標系統的範圍會包含某個形狀爲$\Sigma_i|x^i|\leq 2b$的閉方塊。若取$y^i=x^i/b$，則得新的座標系統(y^i)，這時閉方塊$\Sigma_i|y^i|\leq 2$當然包含於其範圍之中。現在對於每一點$m\in C$按上述我們可以考慮開方塊$\Sigma_i|y^i|<1$，

這是落在其座標鄰域之中的開子集。對每一點都這樣選出一個開方塊的鄰域，他們整個就構成C的一組開遮。由C之緊緻性存在有限個就已能遮蓋C，正如定理所述。□

定理3.4.2 取X為C^{∞}向量場，而C為X之定義域中的一個緊緻集合，$m \in C$，$c \in R$。則存在X的一條積分曲線γ滿足$\gamma c = m$而且：

(a) 或者γ定義於$[c, +\infty)$或者γ定義於$[c, b]$，但其中γb已經不在C中。

(b) 或者γ定義於$(-\infty, c]$，或者γ定義於$[b', c]$，但其中$\gamma b'$已經不在C中。

證明 X的定義域是個開子流形包含C在其中。我們不妨取這開子流形為引理3.4.1中的流形，因此可以假設該引理中的較大的閉方塊就包含在X的定義域之中。現在對於這些系統中的每一個，我們可以寫出X之成分的座標表示F^i。由於$\Sigma_i |F^i|$為連續函數，在閉方塊$\Sigma_i |y^i| \leq 2$之上會具有極大值。而這種閉方塊只不過有限個，因此可以取得這些極大值中的最大數目，而記之為K。

現在假設m'是C中之任意點，則m'落在某個其大小為一的座標方塊之中，例如$y^i m' = a^i$，其中$\Sigma_i |a^i| < 1$。由三角形不等式，以m'為中心的單位長座標方塊會整個被包含於大的閉方塊之中，因為由$\Sigma_i |y^i - a^i| \leq 1$及$\Sigma_i |a^i| < 1$可得$\Sigma_i |y^i| \leq 2$。可見$\Sigma_i |F^i|$在$\Sigma_i |y^i - a^i| \leq 1$之上的極大值不會大於$K$。因此由基本定理$X$經過$m'$點的積分曲線會定義在一個長度不少於$2/K$的區間之上，其中$m'$是落在這區間的中心。這結論的重要性在於只要我們從$C$中之某點出發我們每次就至少能將積分曲線延伸固定長度$1/K$。所以從任意m點出發的積分曲線可以從兩個方向一路延伸，一直到經過某步驟後其終點已經落到C之外，或者一直延伸使得其長度超過任何參數值。□

我們還有如下重要的結論：

定理 3.4.3 假設X這一個C^∞向量場是定義在整個緊緻流形M之上，則X之每一條積分曲線都可以延伸到整個R之上。

像這樣如果一個向量場的所有積分曲線都能無窮延伸而定義在整個R上則說這個向量場是完全的(complete)。因此一個定義在整個緊緻流形上的C^∞向量場是個完全的向量場。

實例 取$M=R^2$，而設x，y為其卡氏座標，這時相應的座標向量場為∂_x及∂_y。令$X=x\partial_x+y\partial_y$ $Y=-y\partial_x+x\partial_y$。按照通常習慣我們不仔細區分$x$與$x\circ\gamma$，而可將$X$之積分曲線所需滿足的方程式寫成：$dx/du=x$，$dy/du=y$。其通解立即可寫出而為：$x=ae^u, y=be^u$。因此滿足始值條件為$\gamma 0=(a,b)$之唯一積分曲線的表示式可寫為$\gamma=(ae^u, be^u)$。這積分曲線之通解是定義在整個$R$之上，所以$X$是完全的向量場。從(0，0)點出發的積分曲線是常數曲線$\gamma=(0,0)$，至於其他點(a,b)出發的積分曲線，就點集而言，就是從原點算起在(a,b)方向上的開半線。

接下來向量場Y的積分曲線所需滿足之微分方程式為$dx/du=-y$，$dy/du=x$。使用$d^2x/du^2=-dy/du=-x$等等資料容易求得這方程組的通解為：$x=a\cos u-b\sin u, y=b\cos u+a\sin u$。滿足始值條件$\gamma 0=(a,b)$之積分曲線為唯一的曲線$\gamma=(a\cos u-b\sin u, b\cos u+a\sin u)$。當$a=b=0$時，這曲線是常數曲線(0，0)。不然這曲線就是一條以原點為中心的圓圈，u每變動2π，曲線就回到原來位置。因此Y仍然是個完全的向量場。

習題 3.4.1 取$X=F\partial_x+G\partial_y$為整個$R^2$上所定義的$C^\infty$向量場。假設存在一個常數$K$滿足$|F|+|G|\leq K$，試證$X$是完全的向量場。試問這是$X$具有完全性的必要條件嗎？

習題 3.4.2 試證X為完全的向量場當且唯當存在一個正數$k>0$使得在任何點m，以m為起點的積分曲線能定義在整個區間$(-k,k)$之上。

習題 3.4.3 設X是M上的一個C^∞向量場，而 $f:M\to R$ 是個正值的C^∞函數。試證對於X的每一條積分曲線γ，都會存在一個具有正導數的函數g以及存在 fX 的一條積分曲線τ，使得γ是τ的新參數表示而可寫成$\gamma=\tau\circ g$。試找出g，γ及f之間的關係。

習題 3.4.4 試求 $X=\partial_x+e^{-y}\partial_y$ 之積分曲線。這X是完全的向量場嗎。

習題 3.4.5 在R^3中試求向量場 $\partial_x+x^2\partial_y+(3y-x^3)\partial_z$ 的積分曲線。

3.5 流 線

假設一個向量場是代表某個流體之速度場，則以時間爲參數，一個質點所流過的軌跡就是一條積分曲線。可是這時另有一種看法也很重要；我們可以研究佔據某一區域的流體在經過某一段時間之後到底已經運動到那一個位置了。就是考慮這方面的問題使我們得出如下有關流線的概念，這是純粹數學的觀念，是與向量場結合在一起的。

所謂某一向量場的**流線**（flow）就是所有映射 $\{\mu_s: E_s\to M\mid s\in R\}$ 之集合，其中對於每點$m\in E_s$都要滿足$\mu_s m=\gamma_m s$，而γ_m是從m點出發X的積分曲線。因此按定義m與$\mu_s m$總是落在X的同一條積分曲線之上，而在$\mu_s m$點與在m點參數值的差正好等於s。換言之，μ_s這映射的功用在於把每點沿著通過該點的積分曲線向前推進等於參數變化s的長度。至於μ_s的定義域E_s則由所有那些點m所組成。在這些點能夠使γ_m在s處有定義。因此若$0<s<t$或者$t<s<0$，則$E_t\subset E_s$。因爲如果γ_m在t處有定義，則當然對0與t間的所有值s照樣都有定義。特別如果X爲完全的向量場，則$E_s=E$（就是X的整個定義域）對所有s都成立。如果X是C^∞，則對每點$m\in E$都有一條積分曲線γ_m。而既然γ_m都在0有定義，所以$E_0=E$。此外由定義當然有$\mu_0:E_0\to M$是E_0上的恒等映射，因爲$\gamma_m 0=m$。這樣看來，一個向量場X之流線所能傳達的資訊全都包含於整個積分曲線的全體裏頭。

就一個C^∞向量場而言，每一個μ_s的定義域E_s都是開集合。特別我

們有：

定理 3.5.1 假設 C^∞ 向量場 X 以 $E \subset M$ 爲其定義域。則對於每一點 $m \in E$，存在這點的鄰域 U 以及一個區間（$-k$，k）使得對於每一個 $s \in$（$-k$，k）我們的 μ_s 都能夠在 U 上面有定義。由於這定理證明起來只不過稍微運用一下基本存在及唯一性定理的內容而已，因此這兒就將證明省略不提。

在較早的時候人們把向量場叫做**無窮小的轉換**（infinitesimal transformations），他們被看成可以用來生成一些通常的轉換，就是生成他們的流線。

一些東西的集合 $\{\mu_s | s \in R\}$ 構成一個**單參數群**（one-parameter group），如果在這集合中擁有一個運算。是跟這集合的參數化具有如下的關連：$\mu_s \circ \mu_t = \mu_{s+t}$，而且又有正數 $c > 0$ 存在使得對於所有處於 $-c < s < c$ 中的 μ_s 全都互不相同。例如實數全體在加法運算之下就構成一個單參數群。又如在複數平面由單位圓所代表的所有單位長度之複數的集合 $\mu_s = e^{is}$，如果定義其間的運算爲複數乘法運算，則也構成一個單參數群。事實上如果不區分同構的單參數群，則能證明所有的單參數群就只有這兩個。

定理 3.5.2 一個完全的 C^∞ 向量場 X 若不是恒爲零，則其流線 $\{\mu_s\}$ 在合成運算之下構成一個單參數群。

證明　有兩件事需要證明：

(a) 對於每兩個實數 $s, t, \mu_s \circ \mu_t = \mu_{s+t}$ 應該全都成立。

(b) 存在 $c > 0$，使得只要 $-c < s < c$，則所有 μ_s 皆相異。

(a) 可以看如定理 3.4.1 的重述。因爲如果 $m \in E$，而 γ_m 爲出發於 m 點 X 的積分曲線，則由式子 $\tau s = \gamma_m(s+t)$ 所定義的 τ（其中 t 固定）應該也是 X 的積分曲線。這時 $\tau 0 = \gamma_m(0+t) = \gamma_m t$，所以 $\tau = \gamma_n$，其中 $n = \gamma_m t = \mu_t m$。但是這樣就有：

$$\mu_s n = \mu_s \circ \mu_t m = \gamma_n s = \tau s = \gamma_m(s+t) = \mu_{s+t} m$$

而已經證明：$\mu_s \circ \mu_t = \mu_{s+t}$.

現在爲證明(b)我們就來考慮一點 m，而假設 $X(m) \neq 0$ 。可以適當選擇在 m 點的座標 x^1 使得 $X^1 m \neq 0$ 。由於 X^1 爲連續函數，只需適當縮小座標鄰域我們不妨假設在整個鄰域上全都有 $X^1 \neq 0$ 。只需更換 x^1 的方向而使得 X^1 總是大於零。這時由積分曲線所滿足的微分方程式之第一式 $dg^1/du = F^1(g^1, \ldots, g^d)$ 立即得出 $dg^1/du > 0$ ，因此 g^1 是個嚴格遞增的函數，這是在此座標鄰域中沿著任何積分曲線都能成立的。對 γ_m 以及一個 x^1 座標方塊運用定理 3.4.1 就存在一個正數 k ，使得當 s 落在 $-k \leq s \leq k$ 時，$g^1 s = x^1 \gamma_m s$ 爲嚴格的遞增函數，因此所有的點 $\gamma_m s = \mu_s m$ ，$-k < s < k$ 全都互不相同。而得證所有的 μ_s 於 $-k < s < k$ 時全都互不相同。 □

接下來繼續定義**局部單參數群**（local one-parameter group）。這也是由一些藉某個包含 0 的區間來做其參數的一些東西的集合。在這集合中至少對於所有落在 0 之附近某區間裏的 s ，t 而言運算 $(\mu_s, \mu_t) \to \mu_s \circ \mu_t$ 全都有定義，而且當這運算能被定義時，他們能滿足 $\mu_s \circ \mu_t = \mu_{s+t}$ 之關係。當然也要求存在某個 $c > 0$ ，使得對於所有 $-c < s < c$ 而言，μ_s 全都不相同。

如果我們容許稍微混用我們的用語，那麼不妨說任何一個 C^∞ 向量場的流線都構成一個單參數群。可是如果我們要嚴格的講，那麼就應講成如下的：

定理 3.5.3 假設 X 是個 C^∞ 向量場。假設 m 是 X 定義域中的一點，而且假設 X 在 m 之某鄰域中不恒爲零，那麼一定存在 m 的一個鄰域 U 使得當我們把 X 的流線局限到 U 時所得到的集合 $\{\mu_s|_U\}$ 是一個局部單參數群。

由於其證明完全類似於定理 3.5.2 的證明，只需在各處自動的修改定義以適應現在局部的情況就可。因此這兒略去證明而將其當做一個習題。

實例 (a) 取 $M = R^d$ ，而令所考慮的向量場爲 ∂_1 ，其中我們當然是使用

卡氏座標。這時∂_1的積分曲線是由

$$du^1/du = 1,\ du^i/du = 0,\ i > 1$$

所給出。因此如果$m = (c^1, \ldots, c^d)$，則由此點出發的積分曲線應為：$\gamma_m s = \mu_s m = (c^1 + s, c^2, \ldots, c^d)$，換言之$\mu_s$是個沿$u^1$方向的平移，其平移量為$s$。

(b) 在R^2上取$X = x\partial_x + y\partial_y$則積分曲線為$\gamma_{(a,b)}s = (ae^s, be^s)$。因此可得$\mu_s(a, b) = e^s(a, b)$。換言之，$\mu_s$把任何向量($a$, b)放大e^s倍，而以原點為中心。

(c) 在R^2上取$\gamma = -y\partial_x + x\partial_y$，則積分曲線為：

$$\gamma_{(a,b)}s = (a\cos s - b\sin s, a\sin s + b\cos s)$$

因此μ_s是以原點為中心的旋轉(rotation)。其旋轉是反時鐘方向的，而角度為s。

(d) 假設X是$M = R^2 - \{0\}$上的單位徑向量場(unit radial field)，換言之，如果使用極座標則$X = \partial_r$。因此μ_s就是沿著r的方向(徑向移動s單位。使用卡氏座標可以寫成：

$$\mu_s(a, b) = [(r + s)/r](a, b), \quad \text{其中} \quad r = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

這式子對於所有$-s < r$都有定義。而且如果$s \geq 0$，則μ_s定義在整個M上，$E_s = M$。對於$s < 0$，μ_s只定義於一個半徑為$-s$的圓盤之外，因此：

$$E_s = \{(a, b) \mid (a^2 + b^2)^{1/2} \geq -s\}.$$

當我們要運用C^∞向量場之流線時，有時候我們必須使用到這些流線所具有的平滑性質，就是交代於下面定理的。

定理 3.5.4 假設$\{\mu_s\}$是C^∞向量場X的流線。則定義於$M \times R$之適當子流形上的映射$F(m, s) = \mu_s m$是個C^∞映射。換言之，$\mu_s m$對於變數s以及變數m而言皆為C^∞函數。

由於證明太具技巧性，所以這兒只好加以省略。主要的關鍵在於證明一組 C^{∞} 微分方程的解是隨著其始值條件而做平滑的變動。關於這種定理的證明可以在一些較深的微分方程式論的書中找到，例如請參考E.Coddington and N.Levinson 所寫的Theory of Ordinary Differential Equations 第 22 頁定理7.1 。

如果我們給定一組映射的集合，假設他們的行爲就像是某個向量場之流線的行爲，則有可能我們能夠從這組映射的集合反過來求得一個向量場使得這向量場的流線正好就是這組映射。這就是下面的：

定理 3.5.5 假設 $\{\mu_t\}$ 是一個由 C^{∞} 映射 $\mu_t: E_t \to M$ 所組成的局部單參數群，其中的局部群運算就是映射的組合。如果映射 $F(m, s) = \mu_s m$ 是個在 $M \times R$ 之開子集上的平滑映射，則存在一個 C^{∞} 的向量場使得 $\{\mu_t\}$ 正好就是其流線的適當局限。

證明　對於 $m \in E_0 = E$ 以及任意 C^{∞} 函數 $f: M \to R$，我們定義：$X(m)f = \partial(f \cdot F)/\partial s(m, 0)$。容易證明這樣所得的 X 確實是個向量場，定義在 E 之上。此外 Xf 是 C^{∞} 映射 $\partial(f \circ F)/\partial s$ 以及 C^{∞} 入射 $m \to (m, 0)$ 的合成映射，因此 Xf 也是 C^{∞} 函數，可見 X 是個 C^{∞} 向量場。所剩下的只需證明 $\{\mu_t\}$ 與 X 之流線在其定義域上彼此重合。因此我們來證明曲線 $\tau_m: s \to \mu_s m$ 爲 X 的積分曲線。$f: M \to R$ 沿著 τ_m 在 $s = t$ 的導數爲：

$$\begin{aligned}
\tau_{m*}(t)f &= \frac{d}{ds}(t)f(\mu_s m) \\
&= \frac{d}{ds}(t)f(\mu_{s-t}\mu_t m) \\
&= \frac{d}{ds}(0)f(\mu_s\mu_t m) \\
&= \frac{\partial f \circ F}{\partial s}(\mu_t m, 0) \\
&= X(\mu_t m)f \\
&= X(\tau_m t)f.
\end{aligned}$$

而已經證明 $\tau_{m*}(t) = X(\tau_m t)$，因此 τ_m 是 X 的積分曲線。□

應用定理 3.5.4 可以得出一個非零 C^∞ 向量場的局部標準形：

定理 3.5.6 假設 X 爲 C^∞ 向量場而 $X(m) \neq 0$，則在 m 點存在局部座標 x^i 使得在此座標鄰域之中 $X = \partial_1$。換言之，每一個非零的向量場在局部上總可認爲是個座標向量場。

證明　在 m 點選取局部座標 y^i 使得 $y^i m = 0$，同時使得：

$$X(m),\ \partial/\partial y^2(m), \dots\dots\dots,\ \partial/\partial y^d(m)$$

構成 M_m 中的一組基。從 R^d 之原點的鄰域定義一個映射 F 到 M 之中，其方法如下：

$$F(s, a^2, \dots, a^d) = \mu_s \theta^{-1}(0, a^2, \dots, a^d),$$

其中 $\{\mu_s\}$ 爲 X 之流線而 $\theta = (y^1, \dots\dots, y^d)$ 就代表 y^i 這個座標映射。顯然 F 是個 C^∞ 映射。

當 s 變動的時候，對於每點 m'，$\mu_s m'$ 都沿著 X 的積分曲線運動。因此 X 的積分曲線在 F 之下就對應於 R^d 中的 u^1 座標曲線。因此如果能證明 F 是某個座標映射之逆映射，則得出第一條座標曲線就是 X 的積分曲線，因此就證明了 X 是第一個座標向量場。

現在爲要證明 F 是在 m 點之某座標映射的逆映射，我們只需運用反函數定理。因此只需證明 F_* 在 R^d 的原點爲非奇異。在 R^d_0 中考慮標準基 $\partial/\partial u^i(0)$，而計算在 F_* 之下其影像如何表爲 $X(m)$，$\partial/\partial y^i(m)$，$i > 1$ 之線性組合。我們前面已經計算過：$F_*(\partial/\partial u^1(0)) = X(m)$。至於 $i > 1$ 時經過原點其他的座標曲線其 $s = 0$，因此按定義 F 與 θ^{-1} 重合，而知 $F_*(\partial/\partial u^i(0)) = \partial/\partial y^i(m),\ i > 1$。所以 F_* 把一組基映射成一組基，因此當然是個非奇異映射。由反函數定理存在 m 的一個座標鄰域 U 使得在其上 $F^{-1} = (x^1, \dots, x^d)$ 有定義，而且爲 C^∞ 映射。□

習題 3.5.1 (a) 假設 $\{\mu_s\}$ 是 ∂_1 的流線而 $\{\theta_t\}$ 爲 ∂_2 的流線，試證對於任意 s 與 t 都有 $\mu_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \mu_s$ 。

(b) 假設 X 與 Y 爲 C^∞ 向量場其流線爲 $\{\mu_s\}$ 及 $\{\theta_t\}$ 。又假設對於所有的 s 及 t 都有 $\mu_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \mu_s$ 。現在如果 $X(m)$ 及 $Y(m)$ 爲線性無關，試證明在 m 點存在局部座標 x^i ，使得在其座標鄰域中正好 $X = \partial_1$ ，$Y = \partial_2$ 。

(c) 試推廣(a)及(b)到 k 個向量場的情形，其中 $k \le d$ 。

3.6 李導數

如果 X 是一個 C^∞ 向量場，則 X 作用於 C^∞ 係數場（函數）而給出另個 C^∞ 係數場。本節所要討論的李導數就要推廣這種運算使其變成一種作用於所有 C^∞ 張量場而保持其類型的運算 L_X 。

取 $\{\mu_s\}$ 爲 X 的流線，而假設 m 是 X 之定義域中的一點。由 μ_s 的定義可知其逆映射爲 μ_{-s} 。由於這兩者同時均爲 C^∞ ，可見 μ_s 其實是個可微同胚映射。因此就每個 s 只要 $\mu_s m$ 有定義，則必定 μ_{s*} 是個 M_m 到 $M_{\gamma s}$ 的同構映射，其中 $\gamma s = \mu_s m$ 。取 $\{e_i\}$ 爲 M_m 的一組基，則 $\{\mu_{s*}e_i\}$ 就是 $M_{\gamma s}$ 中的一組基。我們可以把這些向量 $E_i(s) = \mu_{s*}e_i$ 看成是 TM 中位於積分曲線 γ 之上的一條曲線。當然這兒 γ 是由 m 點出發 X 的積分曲線。在其上之每點 γs ，這些 $E_i(s)$ 給出切空間 $M_{\gamma s}$ 中的一組基。因爲這緣故我們就說這些 E_i 構成一組沿著 γ 而運動的***移動支架***（moving frame）。

現在考慮一個在 m 之鄰域中有定義的 C^∞ 張量場 T 。因此 $T(\gamma s)$ 對於基 $E_i(s)$ 所寫出的成分爲一些 s 的 C^∞ 函數 T^α ，$\alpha = 1, \cdots\cdots, d^p$，其中我們以某種適當方法來排列這些成分的秩序。則這些 T^α 的導數 $U^\alpha = dT^\alpha / ds$ 也就構成沿著 γ 另外一個張量場 U 的成分。此即，U 是 s 的函數，而每個 $U(s)$ 都是 $M_{\gamma s}$ 上的張量。首先我們來證明這個張量值的函數 U 是與 M_m 中開始時所用的基 $\{e_i\}$ 之選取無關的。因爲如果所用的是另外一組基 $\{f_i\}$ ，而取 $F_i(s) = \mu_{s*}f_i$ ，則若 $f_i = a_i^j e_j$ ，由 M_{s*} 之線性性質可得 $F_i = a_i^j E_j$ 。請注意這兒的 a_i^j 是些常數而不是 s 的函數。因此 T 對應於 e 與 f （此即 E_i 與 F_i ）所寫出來的成分是由 s 的常數函數 A_β^α 所連繫

，而有 $T^{f,\alpha} = A^{\alpha}_{\beta} T^{e,\beta}$ ，其中 β 從 1 到 d^p 取和。這樣 T^{α} 的 s 導數間也有同樣的關係式，而知他們是同一個張量 U 對於不同基所寫出的成分。由於 m 點可以任意變動，我們就可以得到 U 在任意點所指定的張量。

從 T 藉著對 X 之積分曲線的參數求導數而導引出來的張量場 U 稱為 T 對於 X 的李導數，而以 $L_X T$ 記之。下面的定理中我們給出有關李導數的一些基本性質：

定理 3.6.1 (a) 假設 T 是個 C^{∞} 張量場，則其李導數 $L_X T$ 也是一個 C^{∞} 張量場。而且兩者屬於同樣類型。當然 $L_X T$ 之定義域為 T 與 X 之定義域的交集。

(b) 如果 T 具有對稱性或反對稱性，則 $L_X T$ 具有相同的對稱性或反對稱性。

(c) L_X 遇到加法可以拆開：$L_X(S + T) = L_X S + L_X T.$

(d) L_X 滿足導運算 (derivation) 的乘積律：

$$L_X(S \otimes T) = (L_X S) \otimes T + S \otimes L_X T.$$

(e) 如果考慮係數場 f ，則有 $L_X f = Xf$ 。

(f) 如果 $X = \partial_1$ 為某局部座標系統的第一個座標向量場，則 $L_X T$ 對於基 ∂_i 之成分 U^{α} 只不過是 $\partial_1 T^{\alpha}$ ，就是 T 之成分對於第一個變數的偏導數。

證明 前面五種性質都可由定義直接得出十分簡單，因此這兒只來證明(f)，而假設 $X = \partial_1$。我們前面已經知道這時在這座標鄰域裏 μ_s 只不過是沿著第一條座標曲線平移 s 的長度。這個平移就把座標曲線送到座標曲線，因此也把座標向量場映到自己本身，而有 $\mu_{s*}\partial_i = \partial_i$ 。因此如果取 e_i 就是 $\partial_i(m)$ ，則有 $E_i = \partial_i$ 。所以 T 對 E_i 之成分就是 T 原來的座標成分。這時對 s 的微分當然按定義就等於求 ∂_1 。□

另外我們還能直接計算而證明在(f)中所提到的做法其實跟各個滿足 $X = \partial_1$ 之座標系統的選取無關。此即假設兩個座標 x^i 與 y^i 都有 $X = \partial/\partial x^1$

$=\partial/\partial y^1$ ，則將T的x^i成分對x^1微分以及將T的y^i成分對y^1微分所得到的結果會相同。實際上我們有：

$$T^{y,\alpha}=A^{\alpha}_{\beta}T^{x,\beta}\quad \text{其中}A^{\alpha}_{\beta}\text{爲一些}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\text{及一些}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\text{的乘積}$$

但是另方面有：

$$X\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^1\,\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial y^i}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial y^i}{\partial y^1}=\frac{\partial}{\partial x^j}\delta^i_1=0$$

照樣也有 $X(\partial x^h/\partial y^k)=0$ 。因此$XA^{\alpha}_{\beta}=0$ ，而知 $XT^{y,\alpha}=A^{\alpha}_{\beta}XT^{x,\beta}$ 。可見$XT^{y,\alpha}$及$XT^{x,\beta}$ 只是同一個張量就不同基時的成分而已。

註：由於 $T=T^{\alpha}P_{\alpha}(\partial_i,dx^j)$ ，其中 $P_{\alpha}(\partial_i,dx^j)$ 是 ∂_i 及 dx^j 的某個張量乘積，所以由性質(c)，(d)及(e)我們可以將L_XT的x^i座標成分表示成$L_X\partial_i$ ，L_Xdx^j及XT^{α}之x^i成分的某個代數式。

習題 3.6.1 試證 $\mu_{s*}X(m)=X(\mu_s m)$ 以及 $L_XX=0$.

定理 3.6.2 假設X是個C^{∞}向量場，T爲一個C^{∞}張量場，設 x^i 爲座標系統其座標向量場爲∂_i ，$X^i=Xx^i$爲X之成分，而$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$爲$T$的成分。則$L_XT$的成分爲：

$$(L_XT)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=XT^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-\sum_{\alpha=1}^{r}T^{i_1\cdots i_{\alpha-1}hi_{\alpha+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\partial_hX^{i_\alpha}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{s}T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{\alpha-1}hj_{\alpha+1}\cdots j_s}\partial_{j_\alpha}X^h. \tag{3.6.1}$$

證明 假設$X(m)\neq 0$ ，由定理3.5.6在m點存在座標 y^i 使得$X=\partial/\partial y^1$ 。再由定理3.6.1(f)。如果$U=L_XT$ ，則 $U^{y,i}_{j}=XT^{y,i}_{j}$ ，又X的x^i成分爲 $X^i=Xx^i=\partial x^i/\partial y^1$ ，其中x^i爲另一個局部座標。而且我們假設T是個(1，1)型的張量場。如果T是別種的類型，其證法可以適當

修改而得。這時有：

$$
\begin{aligned}
U^{x,i}{}_{j} &= U^{y,h}{}_{k} \frac{\partial x^i}{\partial y^h} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \\
&= (XT^{y,h}{}_{k}) \frac{\partial x^i}{\partial y^h} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \\
&= X\left(T^{x,p}{}_{q} \frac{\partial y^h}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^h} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \\
&= XT^{x,i}{}_{j} + T^{x,p}{}_{j}\left(X \frac{\partial y^h}{\partial x^p}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^h} + T^{x,i}{}_{q}\left(X \frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right) \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.
\end{aligned}
$$

在這式中右邊的第二項及第三項裏所含的因子可以化簡：

$$
\begin{aligned}
\left(X \frac{\partial y^h}{\partial x^p}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^h} &= X\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^p} \frac{\partial x^i}{\partial y^h}\right) - \frac{\partial y^h}{\partial x^p} X \frac{\partial x^i}{\partial y^h} \\
&= X\delta^i_p - \frac{\partial y^h}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial y^1} \frac{\partial x^i}{\partial y^h} \\
&= 0 - \frac{\partial y^h}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial y^h} \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \\
&= -\frac{\partial X^i}{\partial x^p},
\end{aligned}
$$

這是因爲我們有：

$$
\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} (Xx^q) = \frac{\partial X^q}{\partial x^j}
$$

使用這些簡化資料立即得出 (3.6.1) 式。

接下來考慮那些使得 $X(m)=0$ 之點 m，可以分兩情形來考慮：

(a) 如果存在 m 的鄰域 U 在其上 X 全都等於零，則在 U 上 μ_s 是個恒等映射。因此 T 對於 $\mu_{s*}e_i = e_i$ 之成分完全等於 T 原來對 e_i 的成分。換言之，所有的 s 導數全都爲零，因此：$(L_X T)_m = 0$。但是另方面 X^i 在 U 上皆全都等於零，因此當然有 $(\partial_h X^i)m = 0$，最後 $(XT^i_j)m = X(m)T^i_j = 0$，所以 (3.6.1) 式左右兩邊全都等於零，而等式成立。

(b) m 是一序列 $\{m_\alpha\}$ 的極限點，但是 $Xm_\alpha \neq 0$。這時已知 (3.6.1)

式就這些 m_α 點全都成立。但是這式兩邊皆爲連續函數，所以只要取極限則知 (3.6.1) 式在 m 點也照樣成立。□

系　$L_{X+Y} = L_X + L_Y$.

習題 3.6.2 對於係數場 f 試證明 $L_X df = d(Xf)$.

習題 3.6.3 試證 L_X 與第 2.14節的收縮運算可交換。此即：假設 C 是個**收縮運算**（contraction），就一個張量的第 p 個順變指標與第 q 個逆變指標取和而收縮，則有

$$L_X(CT) = C(L_XT).$$

習題 3.6.4 對於 C^∞ 向量場 X 與 Y 以及單微分形 θ 試證明下式總會成立.

$$X\langle Y, \theta\rangle = \langle L_XY, \theta\rangle + \langle Y, L_X\theta\rangle.$$

習題 3.6.5 對於 C^∞ 向量場 X，Y 以及係數場（函數）f，試證明：$(L_XY)f = XYf - YXf$。因此 $XY - YX$ 是個向量場，而有 $L_XY = -L_YX$。

習題 3.6.6 試證李導數運算 L_X 跟對稱運算 $\mathscr{S}$ 以及反對稱運算 $\mathscr{A}$ 都互相可交換。因此在對稱張量間的對稱積之下或者在反對稱張量間之外積運算之下，L_X 都是一種導數運算，意即除線性之外尚滿足：

$$L_X(T\wedge U) = (L_XT)\wedge U + T\wedge L_XU.$$

習題 3.6.7 試證：

$$L_XL_Y - L_YL_X = L_{L_XY}. \tag{3.6.2}$$

習題 3.6.8 (a) 如果A是一個（1，1）型的張量場，我們可以將A看如線性映射場：$A(m): M_m \to M_m$ 。試證可以把A唯一的延拓成一個關於張量場的導運算D_A，使得當D_A特別作用於向量場X時，其結果爲$D_A X = AX$，而且：

(1) 對每個張量場T，$D_A T$這張量場與T屬於同一類型。

(2) 對於張量場T及U，我們有：

$$D_A(T \otimes U) = (D_A T) \otimes U + T \otimes D_A U.$$

(3) 加法在D_A之下可拆開：$D_A(T + U) = D_A T + D_A U.$

(4) D_A與收縮運算可交換：$C(D_A T) = D_A(CT).$

另外又證明對於係數場f而言$D_A f = 0$ 。

(b) 使用第2.12節的符號，M_m上的線性映射$A(m)$正確的寫法應該是$A(m)_2: M_m \to M_m$ 。使用同樣符號，當我們把D_A限制到順變向量考慮時應等於$D_A|_{M_m^*} = -A(m)_1: M_m^* \to M_m^*.$

(c) 試證明$L_{fX} = fL_X - D_{X \otimes df}$，其中$X$爲任意向量場而$f$爲係數場。提示：由於兩邊都是導運算，都能與收縮運算相交換，所以我們只需驗證這等式於係數場及向量場時能成立便可。

(d) 假設張量T是屬於（2，1）型，則$D_A T$之成分的公式爲：

$$(D_A T)^{ij}_k = T^{pj}_k A^i_p + T^{ip}_k A^j_p - T^{ij}_p A^p_k.$$

試推廣這公式到其他類型的張量。請注意這兒D_A完全是代數的運算，因爲都沒有牽涉到A或T的成分之導數。

習題 3.6.9 假設X與Y爲C^∞向量場，而$X(m)$與$Y(m)$彼此線性無關，又$L_X Y = 0$ 。設$\{\mu_s\}$爲X之流線，又假設存在正數b，使得在Y的定義域中包含所有點$\mu_s m$，其中$0 \le s \le b$ 。這時試證$X(\mu_b m)$以及$Y(\mu_b m)$也彼此線性無關。

習題 3.6.10 假設$L_X Y = 0$又$Y(m) = \alpha X(m)$。設b一如習題3.6.9所示，試證這時：$Y(\mu_b m) = \alpha X(\mu_b m).$

習題 3.6.11 在 E^2 中考慮向量場 $X=(ax-by)\partial_x+(bx+ay)\partial_y$，其中 a 與 b 爲常數。若 $g=dx\otimes dx+dy\otimes dy$ 爲 E^2 上的歐氏測距，試證

$$L_X g = 2ag.$$

•

3.7 李乘積

李導數的一種十分重要的特別情形就是關於兩個 C^∞ 向量場 X 與 Y 的**李乘積**（Lie bracket）。在習題 3.6.5 中我們已經給出李乘積的另一種表示法。事實上這就是我們預備用來進行進一步討論所要用的公式：$[X, Y]=XY-YX$，其中的 XY 意表這兩個向量場作用於係數場的合成運算。從這樣定義我們並不能直接看出 $[X,Y]$ 是個向量場，因爲 XY 及 YX 都是第二次的偏微分運算，而非通常的向量場。$[X,Y]$ 顯然有加法的性質，遇到兩個函數相加就可把加法拆開來。可是論到乘積的運算規則是眞的需要加以驗證的：

$$\begin{aligned}(XY-YX)(fg) &= X[(Yf)g+fYg]-Y[(Xf)g+fXg]\\ &= (XYf)g+(Yf)Xg+(Xf)Yg+fXYg-(YXf)g\\ &\quad -(Xf)Yg-(Yf)Xg-fYXg\\ &= [(XY-YX)f]g+f(XY-YX)g.\end{aligned}$$

當然如果我們一直固定使用李導式的定義法，如同習題 3.6.5 的做法，那麼上面這些驗證就不需用了。

在同一個座標系統裏的兩個座標向量場之李乘積一定爲零，因爲對 C^∞ 函數之第二次偏導數是與求微分的秩序無關的：$\partial_i\partial_j f-\partial_j\partial_i f=[\partial_i, \partial_j]f=0$。可是如果 x^i 與 y^i 是兩個座標系統，那麼一般而言 $\partial/\partial x^i$ 與 $\partial/\partial y^i$ 就不見得可交換了。例如，在 R^2 中考慮座標系統 x，y 與 r，θ。容易能計算出：

$$[\partial_x, \partial_r]=-\frac{\sin\theta}{r^2}\,\partial_\theta$$

假設向量場 X 與 Y 的 x^i 座標成分爲 X^i 與 Y^i，則 $[X,Y]$ 之成分爲：

$$\begin{aligned}[X, Y]^i &= [X, Y]x^i \\ &= XY^i - YX^i \\ &= X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i.\end{aligned}$$

由這式子明顯可看出李乘積的運算 $(X, Y) \to [X, Y]$ 並不是用來解釋某個張量場。事實上，一個張量場只處理其變數的成分，而不是這些成分的導數。可是某些張量的性質卻在這兒照樣都成立。例如對於每個變數都有加法的性質：

$$\begin{aligned}[X + Y, Z] &= [X, Z] + [Y, Z], \\ [X, Y + Z] &= [X, Y] + [X, Z],\end{aligned}$$

另外李乘積也是反對稱的

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

至於其他線性的性質就不對了，事實上這時我們有：

$$\begin{aligned}[fX, gY] &= (fX)(gY) - (gY)(fX) \\ &= f(Xg)Y + fgXY - g(Yf)X - gfYX \\ &= fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.\end{aligned}$$

當然要是 f 與 g 爲常數函數的話那麼後兩項就都消失了。

此外還滿足下面這個 Jacobi 恒等式：

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

其證明並不難得出。

關於這個Jacobi等式可以有幾種其他的解釋。其中有一個是在習題 3.6.7 中，把公式(3.6.2) 運用於向量場之上。如果對於隨便兩個運算 A 與 B 我們就定義他們的李乘積爲：$[A, B] = AB - BA$，這時 (3.6.2) 式可以寫成 $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$。我們可以把這些想成告訴我們說 $L: X \to L_X$ 是一個李代數間的同態映射。這兒所謂李代數就是一個向量空間，其上具有一個反對稱，雙線性而又滿足Jacobi恒等式的李乘積運算。這兒由 L 所

連繫起來的兩個李代數都是無窮維的向量空間，一邊是所有 C^∞ 向量場的空間，而另邊卻爲作用於張量場之導運算空間。關於 Jacobi 恒等式的另一個解釋是將其改寫成如下形式：

$$L_X[Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z].$$

因此就李乘積而言，L_X 是一種導運算。

習題 3.7.1 取 X, Y, Z 爲 R^3 上的向量場，其成分分別爲 $(0, z, -y)$，$(-z, 0, x)$ 以及 $(y, -x, 0)$。試證如下的對應

$$\mu: aX + bY + cZ \to a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

不僅是一個線性同構映射，而且在 μ 之下李乘積就變成向量間的有向積 $\mu[U, V] = (\mu U) \times (\mu V)$。可見通常三維空間裏使用有向積來做成的向量代數其實是個李代數。特別這時有向積滿足 Jacobi 恒等式。

習題 3.7.2 使用上一題中的符號而取 $U = aX + bY + cZ$。試證向量場 U 之流線是 R^3 中環繞某條通過原點之軸的旋轉，其角速度爲 $-\mu U$。

現在我們要將定理 3.5.6 推廣成牽涉兩個向量場的情形：

定理 3.7.1 假設 X 及 Y 爲 C^∞ 向量場滿足 $[X, Y] = 0$，而假設在 m 點 $X(m)$ 以及 $Y(m)$ 互爲線性無關。則在 m 點存在局部座標使得在其中 $X = \partial_1$，$Y = \partial_2$。若 s 及 t 足夠小，則在 m 之適當鄰域中 $\mu_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \mu_s$，其中 $\{\mu_s\}$ 及 $\{\theta_t\}$ 分別爲 X 與 Y 的單參數群。

證明 如果第一項爲眞，則由於座標向量場互爲可交換，因此第二項當然也成立。所以只需證明第一項，其做法大體與定理 3.5.6 相類似。在 m 附近選局部座標 y^i 滿足：$y^i m = 0$ 而且使得 $X(m), Y(m), \partial/\partial y^3(m), \ldots, \partial/\partial y^d(m)$ 構成 M_m 的一組基。取 V 爲 R^d 中原點的適當鄰域而定義 $F: V \to$

M加下：

$$F(s, t, a^3, \ldots, a^d) = \mu_s \theta_t \varphi^{-1}(0, 0, a^3, \ldots, a^d),$$

其中 $\varphi = (y^1, \ldots, y^d)$ 是所選用的座標映射。如同定理3.5.6的時候能夠證明這個F在原點的賈氏矩陣非奇異，因此根據反函數定理存在$F^{-1} = (x^1, \cdots\cdots, x^d)$，這是$M$在$m$點附近的座標映射。這時立即有$X = \partial_1$。如果限制於$x^1 = s = 0$之點考慮又得$Y = \partial_2$。

在x^i座標中Y的成分爲Yx^i。剛才已經看出在座標切片$x^1 = 0$之中$Yx^i = \delta^i_2$。我們這兒想證明當我們沿著x^1座標曲線移動而交叉通過這座標曲面時這些Yx^i不會變化。事實上由於$[X, Y] = 0$而有$X(Yx^i) = Y(Xx^i) = Y\delta^i_1 = 0$，這表示$Yx^i$在$x^1$變化時根本是個常數，而有$Yx^i = \delta^i_2$在所有由座標切片$x^1 = 0$之點沿著$x^1$座標曲線可以達到之點皆成立。但是所有這些點已經足夠塡滿m之鄰域，而證得在m之鄰域上Y確爲∂_2。□

同樣類似的技巧可以將上面定理推廣成：

定理 3.7.2 假設$X_1, \cdots\cdots, X_k$爲C^∞向量場滿足$[X_i, X_j] = 0$，又假設在m點$X_1(m), \cdots\cdots, X_k(m)$彼此線性無關。則在$m$點附近存在一個座標系統使得在此系統中 $X_i = \partial_i, i = 1, \ldots, k$。這兒當然$k \leq d$。

3.8 李乘積的幾何解釋

在定理3.7.1中已經指明X與Y之流線可互相交換的條件是$[X, Y] = 0$。這種在m點流線的可交換性可以寫成：

$$\theta_{-t}\mu_{-s}\theta_t\mu_s m = m.$$

一般而言對m點施加映射 $\theta_{-t}\mu_{-s}\theta_t\mu_s$ 的結果就是將m點沿著一個像是「平行四邊形」的四邊往前推動。這些邊分別是X，Y，$-X$以及$-Y$按照這秩序的積分曲線，如圖 12 所示。

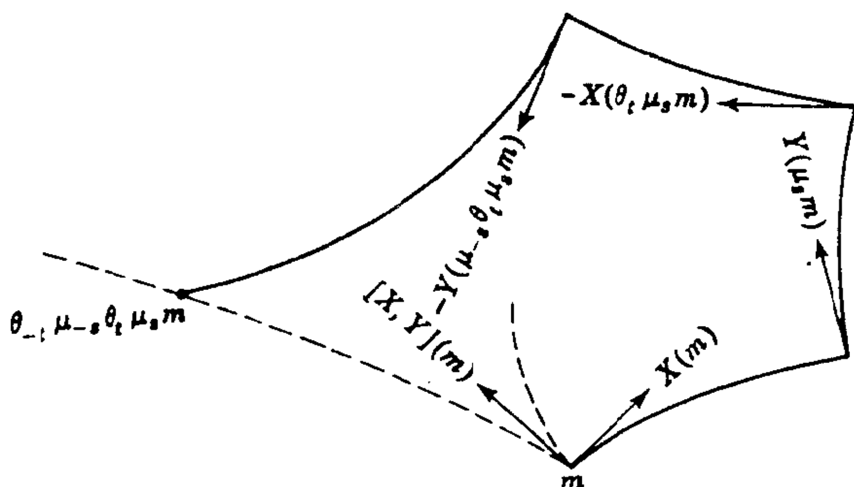


圖 12

我們現在要指出這類「平行四邊形」通常並不構成一條封閉的曲線，其起點與終點之間的空隙（gap）可以由 $st[X,Y](m)$ 來加以估計而得。換言之，李乘積就是一種測量這空隙有多大的近似度量。

如果我們把 Y 替換爲 $(t/s)Y=Z$，那麼同樣這個平行四邊形也可以看如 X 與 Z 的平行四邊形，只不過這時每邊的參數變化全都同爲 s。因此如果在原來的考慮中都假設 $s=t$ 並沒有影響整個問題的一般性。下面的定理給出同一結果的兩種寫法，一個是用座標來寫的，另個則不用座標而表成內在的（intrinsic）寫法：

定理 3.8.1 (a) 令 x^i 爲在 m 點的局部座標滿足 $x^i m=0$，又令 $[X,Y](m)=c^i\partial_i(m)$。則曲線 $\gamma s=\theta_{-s}\mu_{-s}\theta_s\mu_s m$ 之泰勒展式的形狀爲：

$$x^i(\gamma s)=c^i s^2+g^i(s)s^3, \qquad \text{其中 } g^i \text{ 是 } C^\infty \text{ 函數}$$

(b) 在(a)中的曲線 γ 滿足 $\gamma_*0=0$ 以及 $\gamma_{**}0=[X,Y](m)$。這兒有關第二階的切向量 $\gamma_{**}0$ 之定義請參閱習題 1.6.1。

證明 顯然將(b)的結果寫成座標的表示法就等於(a)，因此我們這兒只需證明(a)就夠了。

如果 $X(m)=Y(m)=0$，則立即 $[X,Y](m)=0$ 而且 μ_s 及 θ_s 對

所有 s 都使 m 點保持不動，因此 $\gamma s = m$ ，而 $x^i(\gamma s) = 0s^2$ ， $c^i = 0$ 。因此這時本定理成立。接下來假設 $X(m)$ 與 $Y(m)$ 中有一個不為零，例如設 $X(m) \neq 0$ 。首先必須引入兩種重要的技巧。

第一，選一個能適合這問題的座標系統。像目前的情形如果我們選用座標使得 $X = \partial_1$ 則能大大的化簡 μ_s ，這時 μ_s 只不過是沿著 x^1 方向平移 s 的長度而已。

第二，使用有限項的泰勒展式。我們必須從問題中猜測到底只要把泰勒展式展開到那一項便夠。然後單單使用不超過這一項的部分來進行計算。如果沒能猜準而單用太少項來計算，那麼要重新添多幾項來計算。反之，如果使用太多項來計算，那麼所得的結果相同，只不過徒然浪費精力去處理這些複雜的算式而已。也可以使用無窮多項的泰勒展式來進行計算，其技巧大抵相同。可是這時必須有收斂的假設加進來，因為對於 C^∞ 函數其泰勒展式不一定都收斂也。

現在就假設已經選好了座標 x^i 使得 $X = \partial_1$ ， $x^i m = 0$ ，而且使得 Y 的成分： $Y^i = Yx^i$ 具有如下第二次的泰勒展式：

$$Y^i = b^i + b^i_j x^j + g^i_{jk} x^j x^k,$$

其中 g^i_{jk} 為 M 上的 C^∞ 函數，而 b^i 及 b^i_j 皆為常數。

這時 $[X, Y](m)$ 的成分 c^i 可以計算得：

$$\begin{aligned} c^i &= ([X, Y]x^i)m \\ &= (\partial_1 Yx^i - Y\partial_1 x^i)m \\ &= (\partial_1 Y^i)m \\ &= b^i_1. \end{aligned}$$

接下來要逐個計算這平行四邊形的角之座標，而將其用泰勒展式表現成 s 的冪次。為此我們必須計算積分曲線的方程式，其參數記為 u 。我們使用簡單的符號來表示餘剩的項。例如用 $O(2)$ 或 $O(3)$ 等等，這兒他們的意思分別為二次或三次關於 s ， u 的齊次多項式，以 C^∞ 函數為其係數。所以 $O(2) = \alpha(s, u)s^2 + \beta(s, u)su + \gamma(s, u)u^2$ ，其中 α ， β ， γ 為 C^∞ 函數。

就第一個角的座標，我們有：

$$x^i \mu_s m = \delta_1^i s, \tag{3.8.1}$$

因爲 m 是原點，而 μ_s 是沿著 x^1 方向平移 s 的距離。

接下來如果取第二邊上之點的座標爲 $g^i = x^i \theta_u \mu_s m$，則 g^i 之形狀爲

$$g^i = \delta_1^i s + a_1^i u + a_2^i su + a_3^i u^2 + O(3).$$

因爲這是以 $\mu_s m$ 爲出發點 Y 這向量場的積分曲線。因此這些 g_i 必須滿足 Y 之積分曲線的微分方程式，而得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^i}{\partial u} &= a_1^i + a_2^i s + 2a_3^i u + O(2)\\ &= b^i + b_j^i g^j + O(2)\\ &= b^i + b_1^i s + b_j^i a_1^j u + O(2).\end{aligned}$$

令相應係數相等可得：

$$a_1^i = b^i, \qquad a_2^i = b_1^i, \qquad a_3^i = b_j^i b^j/2,$$

這就算出第二個角 $\theta_s \mu_s m$ 之座標爲：

$$g^i(s, s) = (\delta_1^i + b^i)s + (b_1^i + b_j^i b^j/2)s^2 + O(3).$$

再下去沿著第三邊移動到第三角 $\mu_{-s}\theta_s\mu_s m$ 時只不過順著 x^1 的方向移動 $-s$。因此得出第三角的座標爲：

$$x^i \mu_{-s}\theta_s\mu_s m = b^i s + (b_1^i + b_j^i b^j/2)s^2 + O(3).$$

這些資料就被拿來當做尋求第四邊的始值條件使用。因此若設第四邊上任意點之座標爲 h^i，此即 $h^i = x^i\theta_{-u}\mu_{-s}\theta_s\mu_s m$，則由始值條件可設：

$$h^i = b^i s + a_4^i u + (b_1^i + b_j^i b^j/2)s^2 + a_5^i su + a_6^i u^2 + O(3).$$

但是必須滿足 $-Y$ 這向量場之積分曲線的微分方程式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial h^i}{\partial u} &= a_4^i + a_5^i s + 2a_8^i u + O(2)\\ &= -b^i - b_j^i h^j + O(2)\\ &= -b^i - b_j^i b^j s - b_j^i a_4^j u + O(2).\end{aligned}$$

比較其係數立即可得：

$$a_4^i = -b^i, \qquad a_5^i = -b_j^i b^j, \qquad a_8^i = -b_j^i a_4^j/2 = b_j^i b^j/2.$$

因此第四角 γs 的展式爲：

$$\begin{aligned}x^i(\gamma s) &= h^i(s, s)\\ &= (b^i - b^i)s + (b_1^i + b_j^i b^j/2 - b_j^i b^j + b_j^i b^j/2)s^2 + O(3)\\ &= b_1^i s^2 + O(3)\\ &= c^i s^2 + O(3). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

正如定理所述。□

習題 3.8.1 試就下面特別的實例直接計算曲線 $\gamma s = \theta_{-s}\mu_{-s}\theta_s\mu_s m$，並證明其泰勒展式符合定理3.8.1所給的形式。

(a) $M = R$, $X = d/du$, $Y = uX$.

(b) $M = R^2$, $X = \partial_x$, $Y = x\partial_y$，試繪出幾個平行四邊形的簡圖以表明這條曲線 γs。

3.9 映射之作用

假設 $\varphi : M \to N$ 是個 C^∞ 映射，則有相應的切空間之線性映射 $\varphi_{*m} : M_m \to N_{\varphi m}$。可是一般來講 φ_* 沒辦法將一整個向量場映射成另個向量場。因爲 φ 有可能把M中不同的兩點m與 m' 映射到同一點 $n \in N$，而這時就給定的M上之向量場X而言有可能 $\varphi_* X(m) \neq \varphi_* X(m')$。因此我們沒辦法對 $(\varphi_* X)_n$ 指定一個唯一的向量做爲其值。甚至就算我們碰巧能唯一的指定 $(\varphi_* X)_n$，則所得到的 $\varphi_* X$ 也不見得爲 C^∞（儘管X本身是 C^∞

，φ 也是 C^{∞} ）。例如，有可能影像 φM 並非開集合，而我們又無法將 $\varphi_* X$ 延拓到一個包含 φM的較大的開集合之上。

設X與Y分別爲M與N上的向量場。如果對於X之定義域裏面的每一點m都有：$\varphi_* X(m) = Y(\varphi m)$，則說$X$與$Y$彼此是 φ 相關的（φ-related）。這意思是說X與Y互相 φ 相關的充要條件爲：對於每個C^{∞}函數 $f: N \to R$，都能滿足：

$$(Yf) \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$$

事實上，對於X之定義域上的每點m，上式左右兩邊之值分別爲：$(Yf) \circ \varphi m = Y(\varphi m) f$ 以及 $X(f \circ \varphi)m = X(m)(f \circ \varphi) = (\varphi_* X(m))f$，因此兩者在$m$點相等就表示：$\varphi_* X(m) = Y(\varphi m)$.

定理 3.9.1 假設X_i與Y_i是 φ 相關的，$i = 1, 2$，則必定其各別的李乘積 $[X_1, X_2]$ 也與 $[Y_1, Y_2]$ 互爲 φ 相關。

證明 對於任意的$f: N \to R$我們都有：

$$\begin{aligned}([Y_1, Y_2]f) \circ \varphi &= (Y_1 Y_2 f - Y_2 Y_1 f) \circ \varphi \\ &= (Y_1(Y_2 f)) \circ \varphi - (Y_2(Y_1 f)) \circ \varphi \\ &= X_1((Y_2 f) \circ \varphi) - X_2((Y_1 f) \circ \varphi) \\ &= X_1(X_2(f \circ \varphi)) - X_2(X_1(f \circ \varphi)) \\ &= [X_1, X_2](f \circ \varphi). \qquad \square\end{aligned}$$

C^{∞}映射 $\varphi: M \to N$如果滿足對於每點$m \in M$，其 φ_{*m} 皆爲M_m上的嵌射，則說 φ 是正則的（regular）。

引理 3.9.1 假設 φ 爲正則的映射，則對於每點$m \in M$都存在 φm 處的局部座標y^{α}，$\alpha = 1, \cdots\cdots, e$使得 $x^i = y^i \circ \varphi, i = 1, \ldots, d$ 正好就是M在m點的局部座標。

證明 φ_{*m} 爲一對一映射這條件構成 φ_{*m} 之矩陣表示時就可說成：這

矩陣中略去 $e-d$ 列能夠得出一個非奇異的 $d \times d$ 子矩陣。如果在 m 點選座標 z^i，則在 φ_m 點的任何座標 y^α 都可重新排序使得對應於基 $\partial/\partial z^i(m)$ 以及 $\partial/\partial y^\alpha(\varphi m)$，$\varphi_{*m}$ 所寫成的賈氏矩陣 $(\partial y^\alpha \circ \varphi/\partial z^i(m))$ 之前面的那 d 列構成一個非奇異的子矩陣。這意思就等於說前面的 d 個函數 $x^i = y^i \circ \varphi$, $i=1,\ldots,d$ 跟座標 z^j 之間是以非奇異的賈氏矩陣 $(\partial x^i/\partial z^j(m))$ 相關連，因此自然可取 x^i 爲在 m 點的座標系統。□

定理 3.9.2 假設 φ 爲正則映射而 Y 是 N 上的 C^∞ 向量場滿足對於每個落在 Y 之定義域的**前像** (preimage) 中之點 m 都會有 $Y(\varphi m) \in \varphi_* M_m$。則在這前像上存在唯一的 C^∞ 向量場 X，是能跟 Y 互相 φ 相關的。

證明　首先顯然 X 只能唯一存在，因爲由於 $\varphi_{*m}: M_m \to N_{\varphi m}$ 爲一對一，而且包含 $Y(\varphi m)$ 在其像域之中，所以只能取：

$$X(m) = \varphi_{*m}^{-1}(Y(\varphi m))$$

現在的問題在於必須證明這樣所定義的向量場 X 確實是平滑的。爲此我們計算 X 對於引理 3.9.1 中所述的局部座標：$x^i = y^i \circ \varphi$ 所取的成分。這時這些成分爲：

$$X^i = Xx^i = X(y^i \circ \varphi) = (Yy^i) \circ \varphi = Y^i \circ \varphi$$

其中 Y^α 是 Y 在座標系統 y^α 中的成分。既然 Y^i 及 φ 皆爲平滑的，可見 X^i 必定也照樣是，因此得證 X 是個 C^∞ 向量場。□

我們可以把 φ 相關的概念迅速推廣到任何兩個逆變張量場之間。因爲這時可以先將線性映射 φ_{*m} 延拓成一個 M_m 上逆變張量代數之同態映射，這延拓 φ_{*m} 具有線性，也能滿足 $\varphi_{*m}(A \otimes B) = (\varphi_{*m}A) \otimes (\varphi_{*m}B)$ 對所有的 M_m 上之逆變張量 A 及 B 都成立。現在設 S 及 T 分別爲 M 及 N 上之逆變張量場，則若對於 S 之定義域上的所有點 m 都有：$\varphi_{*m}S(m) = T(\varphi m)$，則說這兩個逆變張量場互相是 φ 相關的。

引理 3.9.2 假設X與Y為φ相關，他們的流線分別為$\{\mu_s\}$及$\{\theta_s\}$，則對於每一個s都有 $\varphi\circ\mu_s=\theta_s\circ\varphi$ 。或即下面的圖式為可交換：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ {\scriptstyle\mu_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_s} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

證明 只需證明φ把X的積分曲線送到Y的積分曲線就可以。□

定理 3.9.3 假設平滑的逆變張量場S與T為φ相關，而另外平滑的向量場X與Y也是φ相關的，則必定$L_X S$與$L_Y T$彼此也是φ相關的。

我們這兒省略其證明。

如果φ是正則映射，定理3.9.2可以很容易的推廣到關於逆變張量場的情形而仍照樣成立。

可是如果所考慮的是順變張量場，則其情形大為不同。首先，這時映射的方向完全跟逆變張量場的映射方向顛倒過來，因為 $\varphi_{*m}: M_m \to N_{\varphi m}$ 的對偶映射就是其**轉置映射**(transpose)： $\varphi^*_m: N^*_{\varphi m} \to M^*_m$ ，定義為： $\langle\varphi_{*m}v, \tau\rangle = \langle v, \varphi^*_m\tau\rangle$ ，其中$v\in M_m$，$\tau\in N_{\varphi m}$ 。這件事實指出從這種映射的觀念而論，所謂逆變與順變張量其實是命名得正好相反了，因為切向量是跟φ的方向相同進行其映射，是餘切向量才逆著φ的方向來進行其映射。因此從這觀點我們若把逆變張量場改稱為切張量場，而把順變張量場改稱為**餘切張量場**(cotangential tensor field) ，應該才較合理。

其次，關於φ相關的順變張量場之存在性不會有任何問題，不像逆變張量場之時，我們是先給定了φ相關的逆變張量場之後才給出其性質與結果。而且必須限制φ為正則的映射我們才能證明這種φ相關之逆變張量場的存在性。由下面這定理可以看出關於順變張量場所能得的結果是更加自然而普遍的：

定理 3.9.4 假設T是N上的一個C^∞順變張量場。設T的定義域為A，

則在 $E = \varphi^{-1}(A)$ 之上存在唯一的一個 C^{∞} 順變張量場 $S = \varphi^{*}T$ 滿足對於每一點 $m \in E$ 都有 $\varphi^{*}_{m}T(\varphi m) = S(m)$ 。這兒 φ^{*}_{m} 代表經延拓的順變張量空間之間的同態映射。如果 T 是屬於 $(0, q)$ 類型，而 $v_1, \cdots\cdots, v_q \in M_m$，則 S 的定義也可寫成： $S(v_1, \ldots, v_q) = T(\varphi_{*m}v_1, \ldots, \varphi_{*m}v_q)$

如果原來的 T 具有對稱性或反對稱性，則在 φ^{*} 之下所得的 $\varphi^{*}T$ 仍然具有對稱性或反對稱性。另外 φ^{*} 也跟對稱化運算及反對稱化運算可以互相交換，因此是順變對稱代數（或順變Grassman 代數）間的同態映射。

證明　為要證明所給的兩種定義互相等價，我們就對 T 的典型項按下法計算。設 dy^{α}，$\alpha = 1, \cdots\cdots, e$ 為一組微分形的局部基，$\tau_1, \cdots\cdots, \tau_q$ 為其中任意 q 個，而設 f 為 N 上之 C^{∞} 係數場，則有：

$$
\begin{aligned}
(\varphi^{*}_{m} f\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_q)(v_1, \ldots, v_q) &= f(\varphi m)\varphi^{*}_{m}\tau_1(v_1)\cdots\varphi^{*}_{m}\tau_q(v_q) \\
&= f(\varphi m)\langle v_1, \varphi^{*}_{m}\tau_1\rangle\cdots\langle v_q, \varphi^{*}_{m}\tau_q\rangle \\
&= f(\varphi m)\langle \varphi_{*m}v_1, \tau_1\rangle\cdots\langle \varphi_{*m}v_q, \tau_q\rangle \\
&= f(\varphi m)\tau_1 \otimes\cdots\otimes\tau_q(\varphi_{*m}v_1, \ldots, \varphi_{*m}v_q).
\end{aligned}
$$

可見兩種定義相等。接下來為證明 $\varphi^{*}T$ 為 C^{∞}，則需證明對於 C^{∞} 係數場 f 以及基微分形 dy^{α} 此事為眞就可，因為一般而言 $\varphi^{*}T$ 可表為一些 $\varphi^{*}f$ 及 $\varphi^{*}dy^{\alpha}$ 之乘積及和。

就係數場 f 而言，我們有：$(\varphi^{*}f)m = f(\varphi m) = (f \circ \varphi)m$ ，或即 $\varphi^{*}f = f \circ \varphi$ ，因此只要 f 為平滑則必定 $\varphi^{*}f$ 亦為平滑。

現在設 x^{i} 為在 m 點的局部座標，而 y^{α} 為在 φ_m 的局部座標。則對於基 $\partial/\partial x^{i}(p)$ 以及 $\partial/\partial y^{\alpha}(\varphi p)$ ，φ_{*p} 所寫成的賈氏矩陣可寫成 $(\partial(y^{\alpha} \circ \varphi)/\partial x^{i}(p))$ ，其中 α 代表列指標而 i 代表行指標，又 p 為 x^{i} 這座標鄰域中的任意點。這時此矩陣的轉置矩陣，此即讓 α 代表行指標而 i 代表列指標，就是對應於 φ^{*}_{p} 的矩陣。因此按照連鎖法則可得：

$$\varphi^{*} dy^{\alpha} = [\partial(y^{\alpha} \circ \varphi)/\partial x^{i}]\, dx^{i} = d(y^{\alpha} \circ \varphi)$$

那麼既然 y^{α} 及 φ 皆為平滑函數，可見 $\varphi^{*}dy^{\alpha}$ 亦具有平滑性。

由第二定義顯然 φ^{*} 能保持對稱性及反對稱性，又能與對稱化運算或

反對稱化運算相交換。□

寫成座標的形式時，φ^* 這運算其實相當於在 T 的座標表示式中將 φ 的座標方程式代入計算而得。這意思是說，倘若 φ 的座標方程式爲：

$$y^\alpha = F^\alpha(x^1, \ldots, x^d) = F^\alpha(x), \qquad \alpha = 1, \ldots, e,$$

如果考慮的順變張量場屬於例如（0，2）這種類型，而寫成 y^α 座標時 T 之形式爲：

$$T = T_{\alpha\beta}(y^1, \ldots, y^e)\, dy^\alpha \otimes dy^\beta.$$

則 $\varphi^* T$ 在 x^i 這座標系統的表達式應爲：

$$\varphi^* T = T_{\alpha\beta}(F^1(x), \ldots, F^e(x))(\partial F^\alpha/\partial x^i)(\partial F^\beta/\partial x^j)\, dx^i \otimes dx^j.$$

註：在上面證明中我們已經觀察到一件十分要緊的事。如果 y^α 爲座標函數，則有 $\varphi^* dy^\alpha = d(\varphi^* y^\alpha)$，因此 φ^* 與運算 d 可以互相交換。事實上這件事對於任意函數 f 皆爲眞：

$$\begin{aligned}(\varphi^* df)v &= df(\varphi_* v)\\ &= (\varphi_* v)f\\ &= v(f \circ \varphi)\\ &= v(\varphi^* f)\\ &= (d\varphi^* f)v,\end{aligned}$$

因此 $\varphi^* df = d\varphi^* f$。在第四章中我們要把運算 d 推廣成作用於任意順變反對稱張量場（微分形）之上，這時仍能證明 d 與 φ^* 互相可交換。

習題 3.9.1 假設 g 爲 N 上的黎曼測距，而 $\varphi: M \to N$ 爲正則的映射。試證 $\varphi^* g$ 是個 M 上的黎曼測距。可是如果 g 只是一個半黎曼測距，試舉例以說明 $\varphi^* g$ 並不見得是一個半黎曼測距。就算 $\varphi^* g$ 是個半黎曼測距，也有可能 $\varphi^* g$ 的指標數與 g 原先的指標數會彼此不相同。最後假設 φ 不是正則映射，而 g 爲黎曼測距，則有可能 $\varphi^* g$ 會不再是黎曼測距。

習題 3.9.2 假設M是R^3中由下式所定義的迴轉面：

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \ , \ z > 0$$

假設g爲R^3上的Minkowski 測距，此即 $g = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2$ 。由於半黎曼測距具有對稱性，因此習慣上我們使用對稱積的符號來表示他們。現在假設 $\varphi : M \to R^3$ 爲包含映射。試證明： $h = \varphi^* g$ 是M上的黎曼測距。這個黎曼流形 (M, h) 特別稱爲**雙曲平面**（hyperbolic plane），因爲其**曲率**（curvature）爲常數－1，請參考第 5.14 節。我們知道歐氏球面 $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的曲率爲正常數 1，因此兩者正好互相對偶。M上有許多的性質都類似於球面 S^2 的性質。譬如說，曲面上的**測地線**（geodesic）正好就是所有M與經過R^3原點之平面的交線，這情形完全跟 S^2 上的測地線就是S^2與經原點之平面之交線相類似。

習題 3.9.3 假設T是個屬於（0，q）類型在N上的反對稱張量場，假設 $q > \dim M$，試證明 $\varphi^* T = 0$ 。

3.10 臨界點的理論

考慮M上的 C^∞ 函數 f，假如在m點滿足 $df_m = 0$，則說m是 f 這係數場的一個**臨界點**（critical point）。使用局部座標的講法這條件等於是說 f 在m點所有的一次偏導數皆必須爲零：$\partial_i f(m) = 0$ 。如果在m點存在一個**鄰域**U，使得對於所有的點 $n \in U$ 都有 $fm \geq fn$（或 $fm \leq fn$），則說m點是 f 的一個（相對的）極大（或（相對的）極小）（relative maximum or minimum）。假設m是 f 的臨界點或極大點或極小點，則稱 fm 爲一個臨界值或極大值或極小值等等。

定理 3.10.1 假設m是 f 的極大點或極小點，則必定m爲 f 的一個臨界點。注意這兒都談論相對的極大或極小，因此以後都把「相對的」三個字省略。

證明 任取 $v \in M_m$，令 γ 是條曲線滿足 $\gamma_* 0 = v$，則 $f \circ \gamma$ 是個實值單變函數，而 0 爲這函數的極大點或極小點。因此 $d(f \circ \gamma)/du(0) = 0 = (\gamma_* 0)f = vf = df_m(v)$。但 v 爲任意切向量，可見 $df_m = 0$。換言之，m 是 f 的臨界點。□

如果對於每點 $n \in M$ 皆有 $fm \geq fn$（或 $fm \leq fn$）則說 m 點是 f 的**最大點**(maximum point)（或**最小點**(minimum point)）。由定義，一個最大點或最小點自然就是一個極大點或極小點，因此也是一個臨界點。

假設 m 爲 f 的一個臨界點，則 f 在 m 點的**赫斯式**(hessian) H_f 是個定義於 M_m 上的雙線性形。若 $v, w \in M_m$，設 W 爲隨便一個 C^∞ 向量場滿足 $W(m) = w$（這個 W 稱爲 w 的 C^∞ 延拓），則定義：

$$H_f(v, w) = v(Wf).$$

由這定義我們可能會覺得 $H_f(v, w)$ 之值可能會隨著 W 的選取而有所變化，因此爲了使這定義合用，我們必須有：

定理 3.10.2 f 在 m 點的赫斯式是個合用而不含混的雙線性形，而且具有對稱性。對應於座標基 $\partial_i m$，H_f 所寫出來的 d^2 個成分分別爲 $(\partial_i \partial_j f)_m$。

證明 取 V 爲 v 的一個 C^∞ 延拓，則由 $df_m = 0$ 可知 $[V, W](m)f = 0$。因此 $vWf = (VWf)m = (WVf)m = wVf$。在這等式中 vWf 與 v 之延拓 V 之選法無關，而 wVf 與 w 之延拓 W 之選法無關，可見 H_f 的定義與 W 之選法無關。而又知 $H_f(v, w)$ 對於 v, w 爲對稱。

$\partial_i m$ 的一個 C^∞ 延拓爲 ∂_i，可見 H_f 的座標成分爲：

$$H_f(\partial_i m, \partial_j m) = \partial_i(m)\partial_j f = (\partial_i \partial_j f)m. \quad \square$$

設 m 爲 f 的臨界點，假設在這點的赫斯式 H_f 爲非退化的，則說 m 是一個非退化的臨界點。這條件就等於是要求 $\det((\partial_i \partial_j f)m) \neq 0$。如果取

$y^i = \partial_i f$，則 $((\partial_i\partial_j f)m) = ((\partial_i y^j)m)$ 可看如函數 y^i 對於座標 x^j 的賈氏矩陣，因此可得：

定理 3.10.3 f 之臨界點 m 爲非退化的充要條件就是 f 的 d 個偏導數 $\partial_i f = y^i$ 形成在 m 點的一組局部座標系統。

如果函數 f 所有的臨界點皆爲非退化的臨界點，則說這函數是個非退化的函數。

在 M_m 中適當的選一組基使其對雙線性形 H_f 爲一組正交單元基，然後再定局部座標 x^i 滿足 $x^i m = 0$，同時 $\partial_i m$ 就是這組在 H_f 之下的正交單元基，這樣就有 $(\partial_i\partial_j f)m = \delta_{ij}\varepsilon_i$，其中對 i 並不取和，而且 $\varepsilon_i = 1$，-1 或 0。可以重新排序使得 -1 的出現在最前面，因此 $\varepsilon_i = -1$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, I$。又使 0 出現在最末後。這時若考慮 f 在 m 點的二次泰勒展式，則可得：

$$f = fm + f_{ij}x^i x^j$$

其中 f_{ij} 爲 C^∞ 函數滿足 $f_{ij}m = \delta_{ij}\varepsilon_i$ 以及 $f_{ij} = f_{ji}$。現在如果假設 ε_i 並不全爲零，我們可以使用如下的步驟選取適當座標以便使得 f 在 m 之鄰域取一個最爲簡單的形狀。這時取

$$y^1 = (-f_{11}x^1 - f_{12}x^2 - \cdots - f_{1d}x^d)/(-f_{11})^{1/2},$$

則 $y^1, x^2, \cdots\cdots, x^d$ 對 $x^1, \cdots\cdots, x^d$ 之賈氏矩陣在 m 點爲非奇異，因此就可以選取 $y^1, x^2, \cdots\cdots, x^d$ 當做在 m 點的局部座標，這時

$$f = fm - (y^1)^2 + \sum_{i,j\geq 2} g_{ij}x^i x^j, \qquad \text{其中 } g_{ij}m = \delta_{ij}\varepsilon_i.$$

按照類似的做法我們可以逐次選取 $y^2, y^3, \cdots\cdots, y^I$。如果進到 $i > I$ 時，則 y^i 的選法只需適當變動符號而取

$$f = fm - \sum_{i=1}^{I}(y^i)^2 + \sum_{i=I+1}^{r-1}(y^i)^2 + \sum_{i,j\geqq r} h_{ij}x^i x^j,$$

就可。這做法一直持續到選得 r 個新座標 $y^1, \cdots\cdots, y^r$，他們與原有的 $x^{r+1}, \cdots\cdots, x^d$ 含在一起構成在 m 點的一組座標系統，其中 r 是 H_f 之秩（rank）。使用這一組新座標 f 之泰勒展式（二次）可表爲：

$$y^r = \Big(\sum_{i,j \geq r} h_{ij} x^i x^j\Big)^{1/2},$$

當 H_f 爲非退化時 $r = d$，這時就沒有那些剩餘的含 h_{ij} 的項了，因此 f 就成功的寫爲一個二次形（quadratic form）加上某一常數。這結果正是所謂的摩斯引理。如果函數 f 在 m 點的 $df_m \neq 0$，則 m 爲正則點。這時重新排序不妨假設 $\partial f / \partial x^1(m) \neq 0$，因此若取 $y^1 = f$，$y^2 = x^2$，$\cdots\cdots$，$y^d = x^d$，則 y^i 構成一組新局部座標系統。這樣我們已經證得下面的：

定理 3.10.4 (a) 假設 m 並非 f 的臨界點，則在 m 點之鄰域存在座標系統 y^i 滿足 $f = y^1$。

(b)（摩斯引理）：假設 m 爲 f 之非退化臨界點，則在 m 存在局部座標 y^i 使得：

$$f = fm - \textstyle\sum_{i=1}^{I} (y^i)^2 + \sum_{i=I+1}^{I} (y^i)^2$$

其中 I 代表赫斯式的指標數。

系 如果 m 爲 f 的非退化臨界點，則 m 必定是個孤立的（isolated）臨界點，此即在 m 點有一鄰域 U，在其中除了 m 以外 f 沒有其他的臨界點。

證明 使用摩斯引理中的座標則臨界點之條件 $\partial_i f = 0$ 變成簡單的 $y^i = 0$ 對所有 i 成立。因此原點 m 爲這座標鄰域中唯一的一個臨界點。□

如果一個臨界點是退化的，那麼它就不一定是個孤立的臨界點，而有固定的一些幾何結構，這種有關臨界點或函數之奇異性的研究及分類理論在近幾十年有長足的進步，而形成一套新的劇變論之研究。讀者不妨參考

我們的劇變論譯叢。另外不在譯叢中的還有一本書：V.Guillemin 及 M. Golubitsky 所寫的 Stable Mappings and Their Singularities，是本很精彩的好書，只不過不太容易讀。

習題 3.10.1 (a) 考慮 $f = xy(x+y): R^2 \to R$，試證 f 具有一個其 H_f 爲零的孤立的臨界點。曲面 f 在這臨界點的形狀十分好玩，試繪出並解釋何以這曲面之名稱爲猴鞍（monkey saddk）。

(b) 試證函數 $f = x^3 : R^2 \to R$ 之臨界點構成一個子流形，因此都是些非孤立的臨界點，而且在每個臨界點其 $H_f = 0$。

(c) 考慮 $f = x^2y^2: R^2 \to R$。其滿足條件 $H_f \neq 0$ 之臨界點所構成的子流形是那一些？這些子流形具封閉性否？是否存在任何臨界點滿足 $H_f = 0$？

(d) 考慮 $f = x^3y^3: R^2 \to R$。試證所有滿足 $H_f = 0$ 之臨界點的集合並不構成一個子流形。

習題 3.10.2 取 M 爲通常 R^3 中的環面（forus），而把其中心擺在原點，其迴轉抽取爲 z 軸。若以 M_I^n 來代表臨界子流形，是由所有其 H_f 之指標數爲 I，而其零化度爲 n 之臨界點所組成的。設 r 代表一點離開原點的距離，而考慮 M 上函數 $f = r|_M$，$g = z|_M$，此即 fm 代表 m 到 0 的距離而 gm 代表 m 點的高度。試求 f 與 g 之各個臨界子流形 M_I^n。如果 M 被推得稍微離開中心，或若稍微傾斜，那麼整個情況會有什麼變化。

習題 3.10.3 假設 f 爲非退化而 M 爲緊緻，試證 f 至少有兩個而至多只能具有有限個臨界點。

有關尋求一個函數之最大或最小的問題常可藉助於定理 3.10.1 來得到解答。如果所牽涉的問題較複雜，那麼或許也需使用其他幾個定理的結果。第一步總是先求解這函數的臨界點方程式 $\partial_i f = 0$。由於出現於一般應用中的流形大抵都能被有限個座標鄰域所遮蓋，因此這兒所涉及的只是有限組的方程式系統 $\{\partial_i f = 0\}$。然後我們比較 f 在這些臨界點（或臨界

子流形）的值，而選出其中最大或最小的地方。

有時候所考慮的流形M是某個更大流形N之中的超曲面，或者幾個超曲面的交集，而f就是一個定義於N上之函數f限制到M上來。這時由於超曲面至少在局部上可以看如一個水平曲面（level surface），而由N上之某函數g取其$g=c$來決定（這時必須dg在M上不爲零）。因此我們就可以將f在這水平曲面$g=c$上之臨界點的條件藉用Lagrangian乘子（Lagrangian multiplier）的方法表達出來。其規則如下：求解聯立方程組：

$$df(n) = \lambda\, dg(n),\ gn = c$$

以得出λ及n，這時所得的n就是$f|_M$的臨界點。要證明這做法爲真其實十分容易。因爲我們知道在N之上存在座標在$n\in M$之任何鄰域中使得其形狀爲：

$$x^1 = g,\ x^2,\ \cdots\cdots,\ x^d$$

這樣就得出：

$$y^2 = x^2|_M, \ldots, y^d = x^d|_M$$

是M上的座標。因此如果$df=\lambda_i dx^i$（在N之上），則將其局限於M時可得$d(f|_M) = \sum_{i>1}\lambda_i\, dy^i$。換言之，$f|_M$在$n\in N$這點是個臨界點的條件就是$n$必須落在$M$中（$gn=c$）以及$\lambda_i n = 0, i>1$。這就等於要求$df(n) = (\lambda_1 n)\, dg(n)$.

現在如果M是幾個超曲面$g_1 = c_1, \ldots, g_k = c_k$的交集，我們可以迅速將上面的規則加以推廣而成：求下列聯立方程組：

$$df(n) = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha\, dg_\alpha(n) \text{ 及 } g_\alpha n = c_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, k,$$

之解而求得$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_k$及$n$。當然在進行這做法時，我們可以選用$N$上最方便的座標系統$z^i$來表達這些$g_\alpha$及$f$。

實例 在球面$x^2+y^2+z^2=1$之上我們想求函數$f=xy+yz-xz$之最

大。如果使用直接的求法我們必須選取一些座標系統（例如各個半球）把 f 用這些座標分別表示（例如當選取 x ，y 爲局部座標時，必須在 f 中用 $z=(1-x^2-y^2)^{1/2}$ 代入）。然後尋求 f 之偏導數之零解。這樣搞起來頗爲麻煩。但是如果我們使用 Lagrangian 乘子的方法這就變得十分簡單。因爲只需解聯立方程式：

$$(y-z)\,dx+(x+z)\,dy+(y-x)\,dz=\lambda(2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz)$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

而求出 x，y，z 及 λ 。由第一式可得：

$$\begin{aligned} y-z&=2\lambda x,\\ x+z&=2\lambda y,\\ y-x&=2\lambda z, \end{aligned}$$

改寫成矩陣的形式可表爲：

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2\lambda & 1\\ -1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=0.$$

但是由第二式（x，y，z）$\neq$（0，0，0），所以這矩陣必須是奇異的，而知其行列式爲零，或即 $-8\lambda^3+6\lambda-2=0$ ，而可求得三個根分別爲 $\lambda=-1$ ，$1/2$ 及 $1/2$ 。

以 $\lambda=-1$ 代入可解前面線性方程式而得 $y=-x$ 及 $z=x$，因此由 $g=1$ 可得兩種情況：

$$(1)\quad (x,y,z)=(1/\sqrt{3},\,-1/\sqrt{3},\,1/\sqrt{3})$$

$$(2)\quad (x,y,z)=(-1/\sqrt{3},\,1/\sqrt{3},\,-1/\sqrt{3}).$$

如果以 $\lambda=1/2$ 代入則只能得 $z=y-x$ ，這是一個通過原點的平面。這平面與球面 M 的交集是個大圓，因此這是一個一維的連通的臨界子流形。因此 $f|_M$ 在這子流形上的値爲常數，我們只需在其上隨便一點計算 f 的値。例如取點：

$$(3)\quad (x, y, z) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0).$$

f 爲 x，y，z 的二次函數，因此 $fp=f(-p)$，可見 f 在第(1)點與第(2)點的值其實相同，都爲：

$$f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -1/3 - 1/3 - 1/3 = -1.$$

但是在臨界子流形上 f 的值爲 $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = 1/2$ 。因此所得的結論是 f 具有兩個最小，就是兩點(1)及(2)。而 f 具有一個大圓的最大點，其方程式爲：

$$z = y - x, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

M.Morse 發展出一套很複雜的摩斯理論把臨界點的個數與類型跟 M 上某些稱爲 Betti 數（參看第 4.6 節）的拓樸不變量連繫在一起。這套摩斯理論可以從雙方面都有用處：因爲有關這些拓樸不變量的知識可用來確認某些類型之臨界點之存在性，而反過來藉著選擇合宜的函數並計算其臨界點的結構我們能夠在許多場合計算出流形 M 的 Betti 數來。

這套摩斯理論可應用於任何定義於一個緊緻流形之上的 C^∞ 函數。至於定義於非緊緻流形上的函數 f，我們只需假設**水平點集**（level sets）$f^c=\{m \mid fm \le c\}$ 爲緊緻就可。這兒的 c 要足夠大使得 f^c 能包含所有的臨界點。當 f 爲非退化時使用摩斯理論做起來相當容易，因爲這時只涉及計算 M_I 中臨界點的個數，其中 M_I 當然是指那些其 H_f 之指標數爲 I 的臨界點之集合。我們也直接以 M_I 來代表這集合中臨界點的個數，而稱之爲 f 的**摩斯數**（Morse number）。爲了指明他理論中這種最簡單的情形其實具有很大的一般性，摩斯證明了對於任意一個 C^∞ 函數只要稍加擾動（perturb），就能變成一個非退化的平滑函數。請將這事與習題 3.10.2 比較，在那習題中只稍微移動環面就使得高度函數 g 與半徑函數 f 全都變成非退化的函數了。

假如 m 是函數 f 的臨界點，如果在 m 的鄰域存在一組適當的座標使得 f 的座標表示是個**二次函數**（quadratic function），則說這個臨界點是 f 的二次臨界點。我們現在考慮球面 S^2 上的一個平滑函數 f 而假設 f 只

有二次的臨界點。而想將摩斯理論用到這情形。首先來看看 f 有沒有二維的臨界子流形。由於 S^2 中只有開子流形，而如果其中有某個子流形也是封閉的，那麼由 S^2 的連通性可知這個子流形必定等於 S^2 本身。由假設 f 只具有二次臨界點，容易證明由這假設可得 f 的臨界子流形具有封閉性。因此若有二維臨界子流形，則只能為 S^2 本身，因此 f 在 S^2 上為常數，這與 f 之臨界點只為二次臨界點的假設相矛盾。因此 f 若有臨界子流形只能為一維或零維。現在來討論一維的臨界子流形。由於只存在兩種連通的一維子流形，R 與 S^1，而且一維的臨界子流形成分必須具封閉性，因此是 S^2 中的緊緻子集合，可見 S^2 中就只可能有某些圓圈是 f 的一維臨界子流形。至於 f 的零維臨界子流形就是一些孤立的臨界點。

其次我們再就這些連通的臨界子流形間按其指標數來加以分類。由於各個不同的臨界子流形都是孤立的，此即他們分別被包含於不同的不相交的開集合中，在這些開集合裏除了所含的連通臨界子流形之外就不再含有其他臨界點，因此由 S^2 的緊緻性可知我們只能有有限個臨界子流形。他們分別可記為：

M_0^0 = 在其上 H_f 為正定的所有臨界點的集合。
　= 所有（局部）極小，或坑（pit）的集合，其個數 P_0 有限。

M_1^0 = 在其上 H_f 為非退化，但既不是正定也不是負定的所有臨界點的集合。
　= 所有鞍點（saddle），或隘口（pass）的集合，其個數 P_1 亦為有限個。

M_2^0 = 所有極大，或峰（peak）的集合，其個數 P_2 為有限，在這些點 H_f 為非退化，負定。

M_0^1 = 所有的臨界點 m 在其鄰域存在座標 x，y 使得 f 的座標表示為 $fm+x^2$。他們構成非孤立的極小。
　= 有限個數的圓圈，稱為圓形谷（circular valley）的，以 R_0 記其個數。

M_1^1 = 有限個數的圓圈，稱為圓形山脊（circular ridges），他們都是些非孤立的極大，以 R_1 記其個數。

我們重複強調這兒由於假設所有的臨界點都爲二次的臨界點，這種假設就迫使所有臨界點集的各個成分都必須是緊緻子流形，因此只能或爲圓圈（circle），或爲孤立點。這時不可能存在單單一小段的山脊，否則的話在這種山脊的端點的臨界點就不可能是二次的臨界點。

現在想使用一些簡單的討論來得出這時的摩斯關係式：$P_2 - P_1 + P_0 = 2$。注意這兒的 2 是 S^2 的 Euler-Poincaré 特徵數（characteristic），是一個重要的拓樸不變量。我們把這曲面想成原來一點水也沒有的乾的地球，之後有許多的雨水下降在這地球上一直到把最高的山峯也都淹沒了。在這樣水面一直上升的過程中我們來計算所形成或被摧毀的湖及連通的陸地之個數。

在每個坑的地方就有一個湖形成。

在每個隘口的地方或者兩個湖連通在一起而成爲一個湖（設其個數爲 P_{11}），或者一個湖接回自己之上而把一塊連通的陸地分割成兩塊（設其個數爲 P_{12}）。

在每個峯的地方一塊陸地（島）會被淹沒了。

在每個圓形谷的地方同時有一個湖以及一塊陸地形成，就是湖中有孤島。

在每個圓形山脊的地方有兩個湖連通成一個湖，同時有一個陸塊被淹沒。

因此有下列結果：

所有形成的湖個數爲：$P_0 - P_{11} + R_0 - R_1$,

所有形成的陸塊之個數爲：$P_{12} - P_2 + R_0 - R_1$,

最初的情況：只有一個陸塊

最末的情況：只有一個湖

湖的個數：$0 + P_0 - P_{11} + R_0 - R_1 = 1$,

陸塊的個數：$1 + P_{12} - P_2 + R_0 - R_1 = 0$.

上面兩式相減而由 $P_1 = P_{11} + P_{12}$ 立即得出所要的摩斯式：

$$P_2 - P_1 + P_0 = 2,$$

習題 3.10.4 適當修改上面的講法而考慮一個呈環面形狀的地球，而證明其上一個函數臨界點之相應結果爲：$P_2 - P_1 + P_0 = 0$。注意這兒環面的 Euler-Poincaré 特徵數爲零，當我們在環面地球上考慮時就每個方向而言，兩個湖能重複相連兩次但卻不會分隔任何陸塊。

習題 3.10.5 試在環面上構造出一個只具有三個臨界點的函數。試說明其中至少有一個臨界點並非二次臨界點。提示：將環面看如一個正方形，其相對邊之點同向黏合。以一對角線將此正方形分成兩個三角形。在一個三角形中放一個極大，而在另個三角形中放一個極小，然後在四角所代表的同一點放一個猴鞍，因此使得沿著三角形的邊這函數的值皆相同。

習題 3.10.6 假設 f 是平面 R^2 上的函數，對於每個常數 c 而言假設其水平點集 f^c 皆爲緊緻集合，又假設 f 只具有二次臨界點。試證所有的連通臨界子流形只可能或爲孤立點（零維），或爲圓圈（一維）。如果其個數均爲有限，試證：

$$P_2 - P_1 + P_0 = 1 \text{以及} P_1 + R_1 \geq P_0 - 1$$

這兒的符號與前引之實例中所使用者相同，這時 R^2 的 Euler-Poincaré 特徵數爲 1。第二個不等式代表另一個摩斯關係式，就緊緻流形而言這不等式恒爲眞，因爲在緊緻流形上的平滑函數一定存在一個最大以及一個最小。

3.11 一階偏微分方程式

在本節我們預備討論最簡單的一種偏微分方程式，就是單單涉及一個未知函數的線性齊次（homogeneous）一階偏微分方程式。因此若取 f 爲未知函數，則其形狀爲：

$$X^i \partial_i f = 0.$$

另外我們也考慮這種方程式的系統，此即對於下列這組聯立線性齊次一階偏微分方程式：

$$X_1^i \partial_i f = 0,$$
$$X_2^i \partial_i f = 0,$$
$$\vdots$$
$$X_k^i \partial_i f = 0.$$

我們尋求其解 f 。這兒所謂線性意思是說，如果 f 及 g 兩函數爲解而 α 爲隨便一個實數，則必定 αf 以及 $f+g$ 也都同樣是解。因此所有的解構成一個向量空間。至於所謂齊次，其意思是這些方程式的右邊均爲零。

我們這兒有一個目標就是將上面這種在座標鄰域裏所表達的問題推廣到一般流形之上來講。

首先我們來簡化所用的符號，而記 $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i, \alpha = 1, \ldots, k$ 。因此我們上面問題中所尋求的就是那種能被 X_1，……，X_k 等 k 個向量場所消滅而變爲零的函數 f，此即：

$$X_\alpha f = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, k.$$

我們假設 $X_\alpha(m)$ 中線性無關向量的最大數不隨著 m 而變動。所以做這種假設只是爲了簡化問題，而非因爲當這最大數不是常數時此方程組沒什麼興趣。事實上這時問題變得相當複雜，必須逐點考慮此問題而變得十分困難。如果一組偏微分方程組中，其 $X_\alpha(m)$ 之線性無關最大數隨著 m 而變動，我們就說這是一種退化的問題。因此以下都假設這方程組非退化，而若 $X_1(m)$，……，$X_h(m)$ 是在 m 點最大的一組線性無關向量，則由連續性存在 m 的鄰域 U，使得對於其中的每點 n 這些 $X_1(n)$，……，$X_h(n)$ 仍然線性無關，因此對於每個 $n \in U$ 以及所有的 $\alpha = h+1, \ldots, k$ 我們都有 $X_\alpha(n) = \sum_{\beta=1}^h F_\alpha^\beta(n) X_\beta(n)$ 。可見若所有的 $X_\beta f$ 均爲零，則隨之 $X_\alpha f = 0$ 。因此在局部上我們總可把原方程式系統化簡成只含 h 條彼此線性無關的方程式所組成。

這時就把 X_1，……，X_h 稱爲此系統在鄰域 U 中的**局部基**（local basis），而稱 h 爲此系統之維數。如果我們移動到 U 外面的一點 p 時，有可能 X_1，……，X_h 會變成線性相關，但是按假設一定存在 p 點的鄰域 V，以及另外 X_α 中某 h 個向量來構成 V 上的一組局部基。因此在 $U \cap V$ 之中我們

有了兩組或多組局部基。事實上，只要取：

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^h G_\alpha^\beta X_\beta,\ \alpha = 1, \ldots, h,$$

而要求矩陣（G_α^β）在U中每點之行列式值皆不爲零。其中G_α^β是h^2個U上的C^∞函數。這時方程式$Y_\alpha f = 0$與$X_\alpha f = 0$在U上具有相同之解。因此Y_α理應被看如另一組局部基。所以只要有一組局部基，自然就有許多組局部基。爲了求方程式系統的解，我們的做法就是去尋找一組最簡單的局部基Y_α，使得解能夠很快的被找出來。現在先就$h = 1$的情形來示範上面所講的構想。

假設$h = 1$，則不妨假設$X_1(m) \neq 0$。根據定理 3.5.6 存在坐標x^i使得在m點的鄰域$X_1 = \partial_1$。因此使用這種座標x^i我們的方程式就變成簡單的$\partial_1 f = 0$。所以任何不含變數x^1的函數都是這微分方程組之解。換言之，這種解沿著X_1的所有積分曲線其值皆爲常數。當然這事實從原來的方程式$X_1 f = 0$看來是十分明顯的。

如果我們要從$h = 1$的情形推廣到$h = 2$的情形其過程相當困難，原因是：如果於$\alpha = 1$，……，h時$X_\alpha f = 0$，則對於任意的α，$\beta = 1$，……，h都有$[X_\alpha, X_\beta]f = 0$。因爲$[X_\alpha, X_\beta]f = X_\alpha(X_\beta f) - X_\beta(X_\alpha f) = X_\alpha 0 - X_\beta 0 = 0$。因此，例如於$h = 2$時，假設向量場$[X_1, X_2]$跟局部基$X_1$與$X_2$互相線性無關，則$h = 2$的微分系統$X_1 f = 0, X_2 f = 0$不會比$h = 3$的微分系統$X_1 f = 0, X_2 f = 0, [X_1, X_2]f = 0$擁有更多的解。因此與解$f$有關的變數個數不只由$h$來決定，而且也由這些$X_\alpha$之間彼此的關係來決定。在下面我們要使用希臘字母$\alpha$，$\beta$及$\gamma$來做爲從 1 到$h$之取和數碼。

爲了把一個線性齊次系統的觀念推廣到流形之上，我們現在專注到由這些$X_\alpha(m)$所張開（span）的子空間。因此我們對每一點m就指定M_m中一個h維的子空間$D(m)$。如果對於每個α都有$X_\alpha f = 0$，則對於每個切向量$t \in D(m)$，t可表爲這些$X_\alpha(m)$的線性組合，因此：

$$tf = c^\alpha X_\alpha(m) f = (c^\alpha X_\alpha f)m = 0.$$

反之，如果$tf = 0$對每一個$t \in D(m)$以及每一點m都成立，則對於每個α以及每點m，由於$X_\alpha(m) \in D(m)$所以：

$$(X_\alpha f)m = X_\alpha(m)f = 0$$

因此對所有的 m 尋求函數 f 能被所有 $D(m)$ 中的向量來映射成零的問題就等於尋求我們目前所考慮這偏微分方程式系統之解的問題。

對於流形 M 中之每點 m 都指定切空間 M_m 中的一個 h 維子空間 $D(m)$ 的映射 D 稱爲 M 上的一個 h 維的**切子束**（tangent subbundle）。如果對於每點 $m \in M$ 都存在一個鄰域 U 以及 U 上的 C^∞ 向量場 X_1, …… ,X_h 使得對於所有的 $n \in U$, $X_1(n), \ldots, X_h(n)$ 都是 $D(n)$ 裏的一組基，則說這個切子束具有平滑性而爲一個 C^∞ 的切子束。這時 X_1, …… ,X_h 就稱爲 D 在 m 點的局部基。

假設 X 是一個向量場，如果對於 X 之定義域中的每一點 m 都有 $X(m) \in D(m)$，則說 X 屬於切子束 D，記爲 $X \in D$。如果對於任意的 X，$Y \in D$ 都保證 $[X, Y]$ 也屬於 D，則說 D 是個**對合的**（involutive）切子束。

定理 3.11.1 一個 C^∞ 切子束 D 爲對合的切子束之充要條件是在每組局部基 X_1, …… ,X_h 當中，$[X_\alpha, X_\beta]$ 一定是 X_γ 的線性組合，此即存在平滑函數 $F^\gamma_{\alpha\beta}$ 滿足 $[X_\alpha, X_\beta] = F^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma$.

證明　假設 D 爲對合的，則 $[X_\alpha, X_\beta] \in D$，因此可以被表成局部基 X_γ 的線性組合，易證所有的係數 $F^\gamma_{\alpha\beta}$ 皆爲平滑函數。反過來如果 $[X_\alpha, X_\beta] = F^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma$，則對於任意 X，$Y \in D$，我們可以寫：$X = G^\alpha X_\alpha$, $Y = H^\alpha X_\alpha$，其中 G^α 及 H^α 皆爲平滑函數，因此：

$$\begin{aligned}[X, Y] &= [G^\alpha X_\alpha, H^\beta X_\beta] \\ &= G^\alpha(X_\alpha H^\beta)X_\beta - H^\beta(X_\beta G^\alpha)X_\alpha + G^\alpha H^\beta F^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma,\end{aligned}$$

可見這向量場當然也落在 D 之中。□

註：方程式 $[X_\alpha, X_\beta] = F^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma$ 通常都表爲座標的形式如下：

$$X^i_\alpha \partial_i X^j_\beta - X^i_\beta \partial_i X^j_\alpha = F^\gamma_{\alpha\beta} X^j_\gamma,$$

這條件就叫做偏微分方程式系統$X^i_\alpha \partial_i f = 0$的可積分條件（integrability conditions），他們正是第3.12節中所要講的Frobenius 定理中有關局部完全可積分性的古典假設。

實例 (a) 設$M = R^3 - \{0\}$。在M上考慮向量場：

$$Z = y\partial_x - x\partial_y,\ X = z\partial_y - y\partial_z, \text{以及 } Y = x\partial_z - z\partial_x,$$

試證在M中任何點m，X, Y, Z都張開一個M_m中二維的子空間$D(m)$。事實上這平面$D(m)$就是歐氏空間E^3中垂直於通過0與m這兩點之直線的平面。注意這兒的符號，在R^3中取用通常的歐氏測距就得出歐氏空間E^3。另外由於$[X, Y] = Z, [Y, Z] = X, [Z, X] = Y$，所以這個切子束是對合的。

(b) 在R^d上以$\partial_1, \cdots\cdots, \partial_k$爲局部基的切子束顯然是對合的，因爲$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0 \in D$。有一種敍述Frobenius定理的方法就是指出每一個對合的切子束在局部上都可以表成這種形狀。換言之，對於一個對合的切子束必定在每點存在局部座標x^i，使得其座標向量場$\partial_1, \cdots\cdots, \partial_k$構成$D$的一組局部基。

設N爲M中之子流形而假設對於每點$n \in N$，N在這點的切空間都被包含於$D(n)$之中，$N_n \subset D(n)$，則說N是D的一個積分子流形（integral submanifold）。

如果$X \in D$而且$X(m) \neq 0$，而γ爲X經過m點的積分曲線，如果取γ定義在一個開區間之上，則γ之像域就是D的一個一維的積分子流形。在局部上γ是可逆的，因此γ的參數就可用來做爲這個一維積分子流形上的局部座標。如果γ的定義域是整個R，而γ又是嵌射，則這些參數可以做爲這一維積分子流形的大域座標（global coordinate）使用。但是如果γ不是一對一，則γ必定具週期性。這樣的積分子流形就與一個圓圈可微同胚。因此可以使用方法局限這些參數使其成爲局部座標使用。

在上面實例(a)中，任何以原點0爲中心的球面都是這個切子束的積分子流形。至於其他的積分子流形爲這種球面中任意的開子集，或者包含在

可數個這種球面中的開子集的聯集。這兒要求**可數個**(countable)這條件目的是要使所考慮的子流形具有可分離性。

假設D爲h維的切子束。如果通過任意點$m \in M$必定存在一個D的h維積分子流形,則說D是完全**可積分的**(completely integrable)。一維的C^{∞}切子束都是完全可積分的,因爲其局部基向量場總有積分曲線存在。在實例(a)中二維的球形切子束也是完全可積分的,因爲通過任何點一定都有一個以0爲中心的球面存在。可是並不見得任何的二維平滑切子束都是可積分的。譬如在R^3中考慮∂_z與$\partial_y + x\partial_z$所張開的二維切子束,這時由於$[\partial_x, \partial_y + x\partial_z] = \partial_z$並不落在這切子束中,所以就無法積分了,這是根據下面所要給的定理而得的結論。這定理是Frobenius定理之逆:

定理 3.11.2 如果一個平滑切子束是完全可積分的,那麼也必定是對合的。

證明 假設D爲完全可積分而X,$Y \in D$。取$[X, Y]$定義域中任何點m而令N爲經過m點D的一個h維積分子流形。則包含映射$i: N \to M$應該具有正則性,而且對於N與$[X, Y]$定義域之交集中的任意點n而言我們都有:

$$X(n) \in D(n) = i_*(N_n) \text{ 以及 } Y(n) \in i_*(N_n).$$

根據定理3.9.2存在唯一的平滑向量場,$X|_N$與$Y|_N$,是與X及Y在i之下相關的。因此根據定理3.9.1,$[X|_N, Y|_N]$應該與$[X, Y]$ i相關。因此特別有:

$$i_*[X|_N, Y|_N](m) = [X, Y](m) \in N_m = D(m).$$

這證明了$[X, Y] \in D$,而知D是對合的。□

如果一個平滑函數f在其定義域中的每一點m都能使得$tf = 0$對於所有的$t \in D(m)$成立,換言之$D(m)$能消滅f,或即df能消滅$D(m)$,則說這個f就是D的**解函數**(solution function)或D的**第一積分**(first

integral）。當然啦，常數函數總是解函數，可是這種解函數對於D之研究沒什麼用處。現在假設f爲解函數而$df_m \neq 0$，此即m非爲f的臨界點，設$fm = c$，則這時水平超曲面$f = c$在m點附近是個$(d-1)$維的子流形M_1，而且在其上$df \neq 0$。M_1的切空間就是M的切空間中能被df消滅的子空間。再由$df(D(p)) = 0$對每點$p \in M_1$都成立，可見$D(p) \subset (M_1)_p$。因此D就在M_1上也定義了一個h維的切子束D_1。假設X_α是D的一組局部基，則$X_\alpha|_{M_1}$就構成D_1的一組局部基。根據定理 3.11.2 這些都是有定義而且平滑的，因此D_1也是個平滑的切子束。這樣看出若能求得D的一個第一積分，我們就能把整個問題的複雜性降低一維。因此如果能夠找出$(d-h)$個彼此不相關的D的第一積分，則我們就完成了對D完整的局部分析。

定理 3.11.3 假設D是一個C^∞的h維切子束。假設$f_1, \cdots\cdots, f_{d-h}$都是$D$的解函數，而且在某點$m \in M$所有這些$df_i$互相線性無關，則在$m$點附近存在局部座標$x^i$使得$x^{h+i} = f_i$，其中$i = 1, 2, \cdots\cdots, d-h$。對任何這樣的座標系統，則其前$h$個座標向量場$\partial_1, \cdots\cdots, \partial_h$構成$D$的一組局部基。另外由：

$$f_i = c^i, i = 1, \ldots, d-h,$$

所定義的座標切片都是D的h維積分子流形。最後，如果將D局限於這樣的座標鄰域，則它是對合的。

我們這兒省略證明，因爲定理中的大部分都已於上段講解過了，至於剩餘的部分只需運用一下反函數定理就能得證。

考慮實例(a)中的球形切子束。能容易證明$f = r$是個第一積分，其中$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$又$r > 0$。由於這時$d-h$只等於一，因此任何形狀如x^1、x^2，r的座標系統都能使其∂_1及∂_2構成D的一組局部基。特別就球座標而言此事爲真。這時的水平（超）曲面$r = c$（就是R^3中所有的以原點爲中心的球面），都是D的積分子流形，正如較早已述及。任取r的函數，例如$r^2 - 3r + 2$，也自然是D的一個第一積分。反之，每一個第

一積分都應該是 r 的函數。注意如果考慮解函數 r^2-3r+2 的水平曲面，例如取 $r^2-3r+2=0$，則此水平曲面由兩個球面：$r=1$ 及 $r=2$ 所組成。

所謂 D 的極大連通積分子流形就是 D 的一個 h 維的連通積分子流形，而不能被包含於任何其他更大的 D 的連通積分子流形之中。在實例(a)中的極大連通積分子流形就是所有整個的球面。而在實例(b)中的極大連通積分子流形就是 R^d 中的 h 維座標平面，在其上最後面那 $d-h$ 個座標分別均爲常數。包含給定一點的極大連通積分子流形如果存在的話只可能唯有一個。

定理 3.11.4 假設 D 是流形 M 上的一個 C^∞ h 維的切子束。對於每一點 $m\in M$，頂多只存在 D 的一個極大連通積分子流形 N 通過 m 點。如果我們知道通過 m 點有隨便一個 h 維的積分子流形的話，那麼極大的連通積分子流形 N 就必定也存在。這時 N 其實就是所有連通的 h 維又通過 m 點之積分子流形的聯集。特別也看出，每一個包含 m 點的連通 h 維積分子流形一定都是 N 中的開子流形。

證明的重點在於指出所有這些包含 m 點之連通 h 維積分子流形的聯集也是一個積分子流形，細節從略。

系 假設 D 是 M 上的一個 C^∞ 完全可積分的切子束，則對於每點 $m\in M$，存在唯一的一個通過 m 點的極大連通積分子流形。

切子束 D 之 h 維積分子流形可以使用 D 之一組局部基的流線來加以參數表示。因此在局部上他們有一些獨一性是那些較低維的積分子流形所沒有的。不僅如此，這樣的做法使我們得以藉助於這些流線來把解函數構造出來，換言之，我們藉著解一些常微分方程式來把解函數構造出來。

定理 3.11.5 考慮 C^∞ 切子束 D，而設 $X_1,\cdots\cdots,X_h$ 爲在 m 點的一組局部基，又設 $\{\alpha\mu_t\}$ 爲 X_α 的流線。如果經過 m 點有一個 h 維的積分子流形

，則N中包含一個m點的鄰域U，使得在U上考慮時可以把U看如下面這個定義於 R^h 之原點鄰域上的映射F之像域。其中F之定義式爲：

$$F(s^1, \ldots, s^h) = {}^1\mu_{s^1} \cdots {}^h\mu_{s^h} m.$$

證明　如同定理 3.11.2 所示，把X_α局限到N上來所得的$X_\alpha|_N$都是N上的平滑向量場，而其流線就等於 $\{{}^\alpha\mu_s|_N\}$。因此F可以完全定義成一個從 R^h 原點的鄰域到N之中的映射。由於 $F_*\partial/\partial u^\alpha(0) = X_\alpha(m)$ ，可見 F_* 在 0 爲一對一。因此F在 0 之適當鄰域也是一對一的映射。因此由反函數定理知道其逆映射就是N上在m點的座標映射。而得證F的像域充滿了m在N中的某一個鄰域。□

註：除了F之外我們另外還有其他的映射可以用來生成h維的積分子流形。對於每一點 $s = (s^1, \cdots\cdots, s^h)$ 取向量場$X_s = s^\alpha X_\alpha$ ，而假設 $\{{}^s\mu_t\}$ 爲這個X_s的流線。我們定義$Gs = {}^s\mu_1 m$。我們知道如果一組常微分方程式系統對於其所含的參數s爲平滑的，那麼這系統的解函數也必定是這些參數的平滑函數，因此上面所定義的映射G是個C^∞映射。因爲這時所考慮的含參數常微分方程式系統爲：

$$\frac{dx^i}{du} = s^\alpha X^i_\alpha = F^i(x^1, \ldots, x^d, s^1, \ldots, s^h),$$

其中X^i_α自然是X_α的成分，而E^i顯然就x^i與s^α而言皆爲C^∞函數。

最後我們要構造出來本節最起初時所立下的目標，就是求得一個偏微分方程式系統的解函數。我們是讓解函數f在D的積分流形上保持爲常數，但卻容許f之值在與D互相橫截（transverse）的方向上隨意平滑的變動，此即：

定理 3.11.6　假設D是個C^∞完全可積分的切子束。假設$X_1, \cdots\cdots, X_h$是D在m點的一組局部基，又設 $\{{}^\alpha\mu_t\}$ 爲X_α之流線。取m點之局部座標x^i滿足 $X_1(m), \ldots, X_h(m), \partial_{h+1}(m), \ldots, \partial_d(m)$ 構成M_m的一組基。取g爲隨

便一個 C^{∞}函數定義在R^{d-h} 之上。又在m點的鄰域定義函數如下：

$$f({}^{1}\mu_{s^1}\cdots{}^{d}\mu_{s^d}m)=g(s^{h+1},\ldots,s^{d}),$$

其中若 $i>h$，則$\{{}^{i}\mu_{t}\}$爲∂_i 之流線，或即平移。這樣定義出來的f就就是D的解函數。而且D的每個解函數在m點鄰域上一定是透過某個函數g而按上式來給出。

證明從略，請當做習題而自行證明。

習題3.11.1 取D爲$R^{3}-\{0\}$上的球形切子束，$X_1=-Z$，$X_2=-Y$。其中Y與Z爲實例(a)中的向量場。並取$m=(1，0，0)$。試證定理3.11.5中的參數化映射F幾乎就等於通常單位球面上球面角的參數表示。

3.12 Frobenius定理

假設D是一個二維的對合的切子束，取X，Y爲D在m點的一組局部基。我們想要尋找一組新的局部基使得這新基自身的李乘積爲零。首先我們當然可以選一組局部座標x^i滿足$x^im=0$，$Y=\partial_2$並使得$X(m)$, $Y(m)$, $\partial_3(m),\ldots,\partial_d(m)$ 構成M_m的一組基。這時若取 $X_1=X-(Xx^2)\partial_2=X^1\partial_1+X^3\partial_3+\cdots+X^d\partial_d$，則$X_1$與$\partial_2$是$D$的一組新的局部基，而且這時他們的李乘積：

$$[X_1,\partial_2]=-(\partial_2X^1)\partial_1-(\partial_2X^3)\partial_3-\cdots-(\partial_2X^d)\partial_d$$

應該是X_1及∂_2的線性組合，例如可以表成$fX_1+g\partial_2$。比較係數可得$g=0$以及$[X_1,Y]=fX_1$。

現在，令$\theta=(x^1,\cdots\cdots,x^d)$爲座標映射而$\{\mu_s\}$爲$X_1$之流線，然後定義：

$$F(s,a^2,\ldots,a^d)=\mu_s\theta^{-1}(0,a^2,\ldots,a^d).$$

這時F_*在原點非奇異，因此F^{-1}存在而成爲在m點鄰域中的座標映射：$F^{-1}=(y^1,\ldots,y^d)$。當$y^1=0$時顯然θ與F^{-1}重合，因此在這種點之

處都有 $Yy^i = \partial y^i/\partial x^2 = \partial x^i/\partial x^2 = \delta^i_2$ 。當 y^1 變動時，我們沿著X_1 的積分曲線在 μ 之下移動，因此 $X_1 = \partial/\partial y^1$ 。如果我們從一個其 $y^1 = 0$ 之點出發順著這種 y^1 曲線運動，則就 $i \geq 2$ 時Yy^i 之導數為：

$$\begin{aligned} X_1 Yy^i &= YX_1y^i + X_1Yy^i - YX_1y^i \\ &= Y\delta^i_1 + [X_1, Y]y^i \\ &= 0 + fX_1y^i \\ &= 0, \end{aligned}$$

可見Yy^i 沿著這些 y^1 曲線是常數，因此$Yy^i = \delta^i_2$ 。這就證明了：

$$Y = (Yy^i)\,\partial/\partial y^i = (Yy^1)\,\partial/\partial y^1 + \partial/\partial y^2 = (Yy^1)X_1 + \partial/\partial y^2,$$

因此 $\partial/\partial y^2 = Y - (Yy^1)X_1 \in D$ ，而知 $\partial/\partial y^1, \partial/\partial y^2$ 應為D的一組新基。參考前節的實例(b)我們看出 D是完全可積分的，而且在 y^i 座標鄰域裏其積分子流形乃是由座標切片 $y^i = c^i$，$i > 2$ 所組成。

上面這種做法可以推廣而用到 h 維的對合的切子束來講。我們首先仍是修改一組局部基以得出一組新的局部基X_1，……，X_h 滿足其李乘積具有如下對角線的性質：假若 α 小於 β ，則有：$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{\beta-1} f^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma$ 。（當 $h=2$ 時，上面所選用的X_1，Y 就符合這種對角線性質）。然後使用 X_α 之流線以及一個輔助的座標系統來定義映射F ，證明其為非奇異，因此可得逆映射F^{-1} ，正好代表一個新的座標系統，在其中 ∂_α 構成D的一組局部基。這個結果就叫做 Frobenius 的完全可積分性定理，正好是定理 3.11.2 之逆：

定理 3.12.1 一個C^∞的對合的切子束D必定為完全可積分。在局部上存在座標系統 x^i 滿足其前面 h 個座標向量場∂_1，……，∂_h 構成一組局部基。而且其座標切片 $x^i = c^i$，$i > h$ 就是積分子流形。另外其解函數就是 x^{h+1}，……，x^d 的 C^∞函數。

當 $h = 2$ 時上面已給出證明，至於一般的 h 其證法類似，故從略。

現在考慮一個不是對合的 C^∞ 切子束D ，則要研究其性質就難得多。

一般而言，我們可以從兩種觀點來處理此問題。第一種做法是假設以求得解函數為目標。我們設法將原來的 D 放進一個較高維而為對合的切子束 $\overline{D}$ 之中，就是把 D 中向量場的李乘積，以及接下去進一步的李乘積全都考慮進來而得出一個龐大的系統 $\overline{D}$，使得在其中進一步的李乘積都不會再使維數增大而跑到 $\overline{D}$ 的外頭。這種做法有時候可能失敗，因為所得 $\overline{D}$ 不能保證一定具有非退化性，此即，有可能 M_m 中之子空間 $\overline{D}(m)$ 的維數會隨著 m 而變動。可是如果運氣好，所得到的 $\overline{D}$ 是個非退化的系統，因此也為一個切子束，則按定義 $\overline{D}$ 是對合的。而 $\overline{D}$ 的解函數就與 D 的解函數相同。當然也有可能 $\overline{D}(m)$ 會等於整個切空間 M_m，這時只有常數才能成為其解函數。

第二種做法是以求得積分子流形為目標。可能其維數低於 D 的維數，但是我們儘可能想要找到愈高維的積分子流形愈好。儘管我們可以由向量場的積分曲線來得到 D 的一維積分子流形，可是上面想要找的最大維數的積分子流形的結構卻相當難於決定。到目前關於這方面的研究工作大概都使用對偶的微分形為工具，我們在第四章會簡單介紹這些微分形。除了我們加強平滑性的假設而變成要求所有考慮的東西都具有實解析性（real-analytic）之外，這方面的工作好像並不見得有很成功的結果。

習題 3.12.1 (a) 考慮 $R^3-\{0\}$ 之上的偏微分方程式系統：$Xf=0$，$Yf=0$，其中 $X=9y\partial_x-4x\partial_y$, $Y=x\partial_x+y\partial_y+2(z+1)\partial_z$。試證此系統具有非常數之解。

(b) 設 f 為一個非常數的解，試求通過點（3，0，0）之水平曲面 $f=c$ 之參數方程式。

習題 3.12.2 試證在 R^3 中偏微分方程組：

$$(\partial_x+x\partial_y)f=0,\ (\partial_y+y\partial_z)f=0$$

只可能有常數解。

習題 3.12.3 試證在 R^4 中若以 x，y，z，w 來代表卡氏座標，則方程式：$(\partial_y+x\partial_z)f=0, (\partial_x+y\partial_w)f=0$，只有一個獨立的解。

習題 3.12.4 在R^4中考慮由$\partial_y + x\partial_z$以及$\partial_x + y\partial_w$所張開的切子束。試證明此切子束不可能有任何二維的積分子流形。

第三章

附　　錄

3.A 張量束

要把T^r_sM變成一個流形是十分自然又容易做成的事。由於$M^r_{m\,s}$中的張量可以在這向量空間中沿d^{r+s}個獨立的方向自由變動，另外點m可以在M中沿d個獨立的方向變動，因此T^r_sM的維數應爲$d+d^{r+s}$。我們可以照第1.2節(f)中的做法，藉著將各個座標鄰域貼補在一起而定義出T^r_sM上的流形結構。T^r_sM中的座標鄰域是取爲所有落在M中某座標鄰域U之上的張量全體。這時我們可以使用U的d個座標再加上對於U之座標系統一個張量所具有的d^{r+s}個成分來做爲T^r_sM中的局部座標。下面特別以**切束**（tangent bundle）來做爲示範：

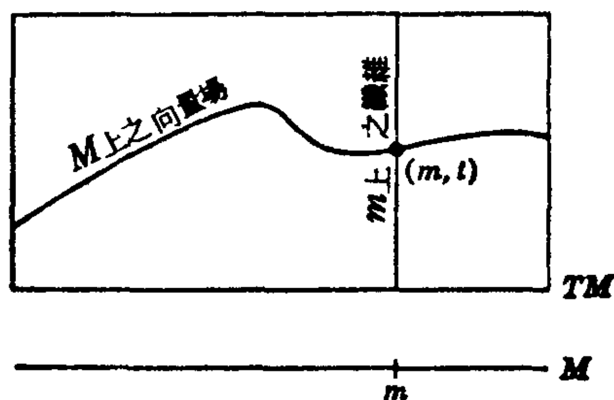


圖 13

請看圖13，我們可以很方便的將TM中的點記爲(m, t)，其中$m\in M$而$t\in M_m$。儘管在t的定義裏已經包含m點，因此這種寫法顯得重複了，可是我們把m明擺出來就可以不用每次都得提t是個落在m點的切向量。設x^i爲U上的座標，而取$V=TU=\{(m, t)\mid m\in U\}$。在$V$上定義$2d$個座標$y^i$及$y^{i+d}$如下：

$$y^i(m, t) = x^i m,$$
$$y^{i+d}(m, t) = dx^i(t).$$

則映射 $\mu = (y^1, \ldots, y^{2d})$ 在 V 上顯然爲一對一。

在每一點 $m \in U$，一個切向量的成分可以認爲就是 R^d 中之一點，因此 μ 的像域就等於 $W \times R^d$，其中 $W \subset R^d$ 是原來座標映射（x^1, ……, x^d）的像域。我們可以把這種形狀的座標鄰域 V 互相像第 1.2 節(f)的做法貼補起來而得出整個 TM 的流形結構。因此在 μ 之下 V 與 $W \times R^d$ 互相同胚。而 TM 中不全落在某一個這種 V 之中的子集合 A 爲開集合的充要條件就是 A 與每個這種 V 的交集必須是開集合。

我們立即能證明 TM 是個 Hausdorff 拓樸空間。假設有兩點：（m, s）與（m, t），其中 $s \neq t$。可假設 U 爲 m 之座標鄰域。由於 R^d 是 Hausdorff 空間，存在開集合 G 與 H 分別包含不同的兩點：

$$(y^{1+d}s, \ldots, y^{2d}s) \text{ 與 } (y^{1+d}t, \ldots, y^{2d}t)$$

其中 G 與 H 彼此不相交。因此 $\mu^{-1}(W \times G)$ 與 $\mu^{-1}(W \times H)$ 就是分別包含（m, s）與（m, t）而彼此互不相交的開集合。接下來如果有兩點（m, s）與（n, t），其中 $m \neq n$，則因爲 M 爲 Hausdorff 空間，我們可以取得 m 與 n 的座標鄰域 U 與 U_1，他們彼此互不相交。這樣 TU 與 TU_1 就是分別包含（m, s）與（n, t）又互不相交的開子集了。可見 TM 確爲 Hausdorff 拓樸空間。

現在假設 $\{U_\alpha \mid \alpha = 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 是 M 上一組可數個座標鄰域基，任何一個鄰域都可由他們來生成。設 U_α 上的座標映射爲 $\{\varphi_\alpha\}$，而在對應的 $\{V_\alpha = TU_\alpha\}$ 上的座標映射爲 $\{\mu_\alpha\}$，取 $\{G_\beta \mid \beta = 1, 2, \cdots\cdots\}$ 爲 R^d 上的一組可數個鄰域基，而令 $W_\alpha = \varphi_\alpha U_\alpha$。則：

$$\{\mu_\alpha^{-1}(W_\alpha \times G_\beta) \mid \alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots\}$$

自然構成 TM 中的一組可數個鄰域基，因此 TM 是可分離的。

最後還需要證明所有 TM 上這些局部座標系統彼此都是 C^∞ 相關的。假設 U 上之座標爲 x^i，而 U_1 上之座標爲 z^i，令 y^i, y^{i+d} 爲 $V = TU$ 上

相應的座標，而 w^i，w^{i+d} 爲 $V_1 = TU_1$ 上相應的座標。我們知道 x^i 與 z^i 在 $U \cap U_1$ 之上是 C^∞ 相關的，可表爲平滑函數：$x^i = f^i(z^1, \cdots\cdots, z^d)$。

就 $T(U \cap U_1) = V \cap V_1$ 上的座標中，其前面 d 個座標的關係式立即可寫成

$$\begin{aligned} y^i(m, t) &= x^i m \\ &= f^i(z^1 m, \ldots, z^d m) \\ &= f^i(w^1(m, t), \ldots, w^d(m, t)). \end{aligned}$$

其中 $(m, t) \in V \cap V_1$。至於其他後面的 d 個座標我們也有：

$$\begin{aligned} y^{i+d}(m, t) &= dx^i(t) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial z^j}(m)\, dz^j(t) \\ &= f^i_j(z^1 m, \ldots, z^d m) w^{j+d}(m, t) \quad (\text{於 } j \text{ 上求和}) \\ &= f^i_j(w^1(m, t), \ldots, w^d(m, t)) w^{j+d}(m, t), \end{aligned}$$

其中 f^i_j 當然是代表 f^i 的偏導數而爲平滑函數。因此後面的 d 條關係式：

$$y^{i+d} = w^{j+d} f^i_j(w^1, \ldots, w^d),$$

照樣都是 C^∞ 的，而證明了這兩個局部座標爲 C^∞ 相關的。

可以自然的定義投射(projection) $\pi : TM \to M$ 爲 $\pi(m, t) = m$。當我們使用座標 x^i 以及 y^i，y^{i+d} 來表示 π 時由 y^i 之定義立即可得：

$$(x^1, \ldots, x^d) \circ \pi = (y^1, \ldots, y^d)$$

因此 π 是個 C^∞ 的映射。

一個向量場可以看成是個映射 $X : E \to TM$，其中 E 是此向量場的定義域。可是這兒必須注意到此映射所需滿足的特別條件 $X(m) \in M_m$，或即 $\pi X(m) = m$。因此一個向量場看成這種映射時必須滿足 $\pi \circ X$ 爲 E 上之恒等映射。而有：

定理 3.A.1 一個映射 $X : E \to TM$ 是個向量場的充要條件是 $\pi \circ X$ 爲 E 上

的恒等映射。此外X爲C^∞向量場當且唯當X看成這種映射時是個C^∞映射。

證明 假設$\pi \circ X$爲E上的恒等映射，則X的座標表示可寫成：

$$y^i \circ X = x^i,$$
$$y^{i+d} \circ X = Xx^i,$$

因爲$y^iX(m) = y^i(m, X(m)) = x^im$及$y^{i+d}X(m) = y^{i+d}(m, X(m)) = X(m)x^i = (Xx^i)m$之故。只要$X$的定義域$E$爲開集合，前面的那$d$個座標表示總是平滑的。至於後面那$d$個則代表$X$的成分，因此他們是$C^\infty$當且唯當$X$是個$C^\infty$向量場。□

習題 3.A.1 推廣上面所定義的投射π而成爲從張量束T_s^rM到M的投射。這時同樣也證明一個類似於定理 3.A.1 的定理。

3.B 可平行化的流形

在TM中前面提到特別的座標鄰域V。這個V是跟**乘積流形**(product manifold)$U \times R^d$互相可微同胚的。因此如果M能由單獨一個座標鄰域系統所遮蓋，則TM就與$M \times R^d$互相可微同胚。可是這並不是能使得TM與$M \times R^d$可微同胚的唯一情形。如果在流形M上存在C^∞向量場X_1，……，X_d使得在每點$m \in M$，$\{X_1(m), \ldots, X_d(m)\}$都是$M_m$中的一組基，則說$M$是個**可平行化的**(parallelizable)流形。這樣的一組X_i稱爲M的一個平行化。我們以下列定理來給出這性質的另種講法：

定理 3.B.1 M是可平行化的充要條件爲存在一個可微同胚映射$\mu: TM \to M \times R^d$滿足μ的第一個因子正好等於投射$\pi: TM \to M$，而對於每點m，μ的第二個因子局限於M_m時是一個線性映射$M_m \to R^d$。

證明概述 假設M可藉向量場X_1，……，X_d來加以平行化，取τ^1，…

，τ^d 爲其對偶的微分形基。這時 μ 可給爲：

$$\mu(m, t) = (m, \langle t, \tau^1(m)\rangle, \ldots, \langle t, \tau^d(m)\rangle).$$

顯然 μ 的第一個因子爲 π ，而第二個因子在每個 M_m 上皆爲線性映射。另外不難證明 μ 及 μ^{-1} 皆爲 C^∞。

反之，假設 $\mu: TM \to M \times R^d$ 就是定理中所提到的那種可微同胚映射。在 R^d 中取各單位向量 $\delta_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di})$，他們構成 R^d 中的自然基，而定義 $X_i: M \to TM$ 爲 $X_i(m) = \mu^{-1}(m, \delta_i)$ 。能證明這 d 個向量場 X_1，……，X_d 確實構成 M 的一個平行化。□

習題 3.B.1　假設 X_i 是 M 上的一個平行化，而 (f_j^i) 是一個由實值 C^∞ 函數所構成的 $d \times d$ 方陣，在 M 之每一點其行列式值皆不爲零，則 $Y_j = f_j^i X_i$ 也是 M 的一個平行化。反之 M 上隨便兩個平行化 $\{X_i\}$ 與 $\{Y_j\}$ 之間一定具有如此的關係。

假設 M 與 N 爲流形而 X 爲 M 上之向量場，則我們可以把 X 也看成是 $M \times N$ 上的向量場。這時若使用乘積座標，則 X 的成分與 N 的座標無關，又 X 的後面 e 個成分（ $e = \dim N$ ）皆爲零。此即：若 $j_n: M \to M \times N$ 爲入射 $j_n(m) = (m, n)$ 則把 X 看成 $M \times N$ 上的向量場時 X 在 (m, n) 點的值可取爲：

$$X(m, n) = j_{n*}X(m).$$

再者，如果 $p: M \times N \to M$ 及 $q: M \times N \to N$ 分别爲投射，則 $p_* X(m, n) = X(m)$ ， $q_* X(m, n) = 0$ 。這些條件就唯一的決定 X 爲 $M \times N$ 之上的向量場。照様若 Y 爲 N 上的向量場，則存在唯一的一個 $M \times N$ 上的向量場，也記爲 Y，滿足： $p_* Y = 0$ ，$q_* Y = Y$.

假設 X_i 是 M 的平行化，而 Y_α 是 N 的平行化，則 X_i，Y_α 看如 $M \times N$ 上之向量場時就構成 $M \times N$ 的一個平行化而有：

定理 3.B.2　可平行化的流形之乘積仍然是個可平行化的流形。

除了 R^d 中之例子流形自然爲可平行化的流形之外，我們可以考慮圓圈 S^1，這也是一個可平行化的流形。事實上只要把角度 θ 限制於任何長度爲 2π 的區間，則取 $X = d/d\theta$ 就可。因爲 θ 的任意兩種定法在局部上都只相差 $2n\pi$，其中 n 是個整數，因此他們都給出相同的座標向量場，而且這個 X 在每點都有定義也都不爲零。

使用定理 3.B.2 立即可得環面是個可平行化的流形，因爲 $T^2 = S^1 \times S^1$。

爲了示範那種不可平行化的流形我們只需考慮不具符號的流型，就是下一節所要討論的。事實上，假設 M 上的平行化爲 X_i，則所有座標系統 x^i 滿足 $X_i = f_i^j \partial_j$，以及 $\det f_i^j > 0$ 這兩條件者就組成一個具有符號的圖表集。可見倘若 M 可平行化，則必定 M 就具有符號。所以不具符號的流形一定不可平行化。

有一類重要的可平行化的流形就是那種其上具有李群結構的流形。在一個李群 G 之上我們有群的運算，當這運算被看成 $G \times G \to G$ 的映射時是個 C^∞ 映射。對於每個固定的 $g \in G$，從左邊乘以 g 的運算 $L_g: G \to G$，$L_g h = gh$ 是個可微同胚映射。假設 e 爲 G 中的恒等元素（identity），而取 $\{t_1, \cdots\cdots, t_d\}$ 爲切空間 G_e 中的一組基，而定義 $X_i(g) = L_{g*} t_i$，則顯然 X_i 爲 G 上之 C^∞ 向量場，而且就給出 G 上的一個平行化。這些 X_i 另外還具有左不變性（left invariant），此即對於所有 $g \in G$ 都有 $L_{g*} X_i = X_i$。考慮 G 上所有左不變向量場的集合，他們構成一個 d 維的向量空間，稱爲 G 的李代數，這李代數就是由這些 X_i 所張開而得。在李乘積運算之下這李代數具有封閉性，此即任何兩個左不變的向量場的李乘積仍然是個左不變向量場。這種李群的性質可以大部分由其李代數之性質而得到決定。我們知道所有的矩陣群都是李群，因此像研究正交群，么正群或斜稱群時，我們大概都應從其所對應的李代數著手。

3.C 可具號性

兩組座標系統 x^i 與 y^i 稱爲具有相同的符號如果他們之間的賈氏方陣的行列式值在有定義的地方總爲正數。如果在流形 M 上存在一個圖表集使得在此圖表集之中的任何兩組座標皆具有相同的符號，則說 M 是可具號的

(orientable)。這樣的一組圖表集就指定了M上的一個符號。如果兩個圖表集滿足前者的座標系統與後者之座標系統之間的賈氏方陣之行列式值總爲負，則說這兩個圖表集決定了相反的符號。假設圖表集$\{\mu_\alpha=(x^i_\alpha)\mid\alpha\in A\}$給出$M$上的一個符號，則只要在此圖表集裏的每個座標系統都改變第一個座標的符號，而換成考慮圖表集$\{\varphi_\alpha=(-x^1_\alpha, x^2_\alpha, \ldots, x^d_\alpha)\mid\alpha\in A\}$，則這圖表集就決定了一個與原來符號相反的符號，當然如果把每個座標系統都加以**奇排列**(odd permutation)，則所得之圖表集也給出相反的符號。

R^d中之開子流形都是可具號的，因爲其圖表集可以只包含單獨一個座標系統，因此當然符合可具號的條件。

一個連通的可具號流型正好有兩個符號。在其中每一個具有連通座標鄰域的座標系統一定與這兩個符號中的一個具有相同的符號。如果某座標系統之座標鄰域不連通，則我們可以將其限制於每個連通的成分而分裂成數個座標系統。這樣得到的每一部分就跟M之給定符號或者相合或者相反。

一個可具號的流形如果擁有k個連通的成分，那麼我們就可以指定2^k種不同的符號。因爲在每一個連通的成分上都可以指定兩種不同的符號。如果M之某一個連通成分是不具號的，則整個M就是不具號的。

在R^3中的曲面(此即R^3中的二維子流形)，爲可具號曲面的充要條件爲：存在一個連續的全不等於零的向量場在每點都垂直於此曲面。因爲如果此曲面可具符號，可選定一個圖表集來指定此曲面的符號。對這圖表集裏的每個座標系統x^i，我們可以取其座標向量場之有向積$\partial_1\times\partial_2$除以其長度而得出一個單元法向量場。由可具號性的假設顯然這法向量場從一個座標系統過渡到另個座標系統時能保持其連續性。反之，如果這樣的一個連續法向量場存在，我們就可以選出所有那些座標系統滿足其座標向量場的有向積正好是這法向量場的正數倍。所有這些座標系統組成一個皆具有相同符號的圖表集。因此此曲面可具號。注意在這種法向量場的講法裏我們使用R^3中額外的結構以使垂直這觀念有意義。事實上我們可以不需使用這種方便的歐氏空間中的觀念而以非切向量場來取代剛才所提的法向量場，這樣仍能得到類似的結果。我們可以推廣上面的結果而說：一個$(d+1)$維具號流形中的d維子流形(或叫超曲面)爲可具號的充要條件

是：存在一個連續的非切向量場在這超曲面上，使得在每一點這個非切向量場皆不為零。R^3 中曲面的可具號性也通稱為此曲面之**雙面性**（two-sidedness）。

如果流形之圖表集只含有有限個圖表，則我們可以使用一種重複的過程來構造出一個皆具有同符號的圖表集，或者證明此流形為不可具號。第一步，如果所涉及的座標鄰域有不連通的，則將其分裂成幾個連通的座標系統，因此，如果我們在某點改變某座標系統的符號，則必須在其整個座標鄰域裏也都做同樣的改變。現在從隨便一個座標系統出發，我們把所有跟此座標系統有交集的其他相鄰座標系統都適當改變方向，而使得他們全都具有同一符號。這種做法在下列兩種情況時變為不可能：(1)兩個座標鄰域之交集分成兩個不相交的成分，在其中一個這兩座標系統具同一符號，可是在另一個卻具不同符號；(2)對於開始的座標系統 A，我們已經適當調好跟其緊接的兩個座標系統 B 與 C 使得跟 A 都具有相同的符號，可是 B 與 C 之座標鄰域有某些交點落在 A 的座標鄰域之外，而在此交集 B 與 C 的符號不同。當有這兩種情況之一發生時，我們就知道這流形不可具號。如果這兩種情況都不發生，那麼我們從原來一個座標系統出發可以得出一組跟 A 相交而經適當變換的座標系統，他們都具有相同的符號。我們可以由這一組同號座標系統出發按同樣方法繼續擴充，或者發現 M 是不可具號的，或是得出一組更大的座標系統之集合，他們都具有相同的符號。這樣繼續做有限次就可能得出一個具有符號的圖表集了。

為示範這種做法我們這兒來考慮 d 維的**射影空間**（projective space）P^d。我們可以把這空間的元素看如 R^{d+1} 中通過原點的直線，或者**比值類**（proportionality class）$[a_0 : a_1 : \cdots\cdots : a_d]$，其中的 a_i 不全為零。如果 u^α 為 R^{d+1} 中的標準卡氏座標，假設在 P^d 的開子集 U 上 $u^\beta \neq 0$，則在 U 上對於所有 α 而言，$u^\alpha | u^\beta$ 皆為合宜的函數。在 P^d 上選取如下（$d+1$）個座標系統：

$$\{(x^i_\alpha) \mid \alpha = 0, \ldots, d, \alpha \neq i\} \quad \text{其中} \quad x^i_\alpha = u^i / u^d$$

則他們構成一組圖表集。其中每個座標系統的像域都是整個 R^d。座標轉換式顯然可寫成：$x^i_\alpha = x^i_\beta / x^\alpha_\beta$，其中當 $i = \beta$ 時，令 $x^\beta_\beta = 1$。兩個座標

系統 (x_α^i) 與 (x_β^i) 之交集在 β 座標映射之下被映成 R^d 中的兩個半空間 $x_\beta^\alpha > 0$ 與 $x_\beta^\alpha < 0$ 。換言之，這兩個座標系統的定義域之交集分成兩個連通的成分。現在照著 i 從 1 到 d 的秩序來排列座標 x_0^i，然後照著 $i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, 0, \alpha + 1, \ldots, d$ 的秩序來排列座標 x_α^i 。則賈氏方陣 $(\partial x_\alpha^i / \partial x_0^j)$ 是個對角線方陣，其對角線上之項均爲 $1/x_0^\alpha$ ，除了第 $j = \alpha$ 行的對角線項比較特別而爲 $\partial x_\alpha^0 / \partial x_0^\alpha = -1/(x_0^\alpha)^2$ 。因此其行列式值爲 $(-1)/(x_0^\alpha)^{d+1}$。因此如果 $d + 1$ 是個偶數的話，則行列式值在 (x_α^i) 與 (x_0^i) 座標鄰域交集之兩個成分上皆同取負值。可是如果 ($d + 1$)爲奇數，則在兩成分上之值有一爲正而另一爲負。因此若 d 爲奇數，我們可以更動 0 座標系統之秩序以使得 0-α 賈氏方陣之行列式值恒爲正。現在考慮三個座標系統 0，α，β 的交集，這交集會分落在 α-β 交集的兩成分中。由 0-α 與 0-β 轉換行列式值均爲正的性質可得他們的商，就是 α-β 賈氏方陣的行列式值也在每成分之每點爲正，因此在所有地方皆爲正。而已經證明 P^d 當 d 爲奇數時爲可具號的，但是當 d 爲偶數時卻爲不可具號的。

習題 3.C.1 試證下列流形均爲可具號的：

(a) 可具號流形之卡氏乘積；

(b) 每一個一維的流形；

(c) 環面；

(d) d 球面 S^d ；

(e) 任何流形 M 的切束 TM 。

習題 3.C.2 試證下列流形均爲不可具號的：

(a) 隨便一個不可具號流形跟其他流形的卡氏乘積；

(b) Klein 瓶；

(c) Möbius 帶。

習題 3.C.3 假設 M 是個不可具號的流形，而 $\{(\mu_\alpha, U_\alpha)\}$ 是 M 上的一組圖表集。假設對於每對 α 與 β ，座標鄰域的交集總可分成兩部分：$U_\alpha \cap U_\beta = V_{\alpha\beta}^+ \cup V_{\alpha\beta}^-$ ，其中在 $V_{\alpha\beta}^+$ 之上兩個座標映射 μ_α 與 μ_β 之間的賈氏方

陣之行列式值為正，而在$V^{-}_{\alpha\beta}$之上其值為負。我們現在要用下面的方法來黏補出一個新的流形 ${}^{0}M$來。在這 ${}^{0}M$ 上取一組圖表集 $\{(\mu_\alpha^+, U_\alpha^+), (\mu_\alpha^-, U_\alpha^-)\}$ 正好是M上原來圖表集的兩倍。其中 μ_α^+ 與 μ_α^- 的像域都與 μ_α 的像域相同。就所有四種可能的符號取法：

$$(a, b) = (+, +), (+, -), (-, +), 或 (-, -)$$

我們都有座標轉換 $\mu_\alpha^a \circ (\mu_\beta^b)^{-1}$ 分別等於將 $\mu_\alpha \circ \mu_\beta^{-1}$ 局限於$V_{\alpha\beta}^{ab}$之上，其中 $++ = +, +- = -, -+ = -, \quad -- = +$。試證：

(a) 藉著第 1.2 節(f)所述的黏補方法，所有這些座標鄰域與轉換合在一起確能給我們一個有合宜定義的流形 ${}^{0}M$。

(b) ${}^{0}M$是個可具號的流形。

(c) 如果M原來是連通的，則 ${}^{0}M$也照樣是連通的。

(d) 映射 $\varphi_\alpha^a = \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\alpha^a: U_\alpha^a \to U_\alpha$ 在各個定義域之交集上是彼此諧調一致的，此即：$\varphi_\alpha^a|_{U_\alpha^a \cap U_\beta^b} = \varphi_\beta^b|_{U_\alpha^a \cap U_\beta^b}$ 。因此存在唯一的一個合宜的映射 $\varphi: {}^{0}M \to M$ ，滿足 $\varphi|_{U_\alpha^a} = \varphi_\alpha^a$ 。

(e) 對於每個指標α都有 $\varphi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha^+ \cup U_\alpha^-$ 。φ_α^a均為U_α^a到U_α之上的可微同胚映射。另外$U_\alpha^+ \cap U_\alpha^-$總為空集合。(e)這個性質通常可以講成：在$\varphi$這個**覆蓋映射**（covering map）之下，${}^{0}M$是M上的**雙層覆蓋**（twofold covering）。由於 ${}^{0}M$是可具號的，所以這種 ${}^{0}M$ 只有一個，稱為M上具號的雙層覆蓋。藉著考慮 ${}^{0}M$與M之間的關係，我們有時候能夠把可具號流形上的結果推廣到不可具號的流形之上。

第三章習題提示

3.1.2 $F^{ij} = X^i Y^j$ ；$G^i = X^j \dfrac{\partial Y^i}{\partial X^j}$ 。

3.2.1 已知(3.2.2)式若成立，則(3.2.3)式及(3.2.4)式皆能成立。因此現在假設(3.2.4)式能成立。對T_m中之任意向量A及T_m^*中之任意餘切向量B，可以考慮其C^∞延拓X，τ滿足$X_m = A$，$\tau_m = B$。這時定義$T(\cdots\cdots A, \cdots\cdots, B\cdots\cdots) = T(\cdots\cdots X, \cdots\cdots, \tau\cdots\cdots)m$。由條件(3.2.4)可知這樣的定義與 C^∞ 延拓的選取無關。然後使用(a)(b)兩性質就知所指定的確實是T^{*}_{m}中的元素。

3.2.2 由 3.1.2 可知

$$T(X,gY)=\cdots\cdots+X^j\frac{\partial(gY^i)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$=\cdots\cdots+gX^j\frac{\partial(Y^i)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+X^jY^i\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$=gT(X,Y)+\frac{\partial g}{\partial x^j}X^jY^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

因此額外的條件(3.2.4)式沒辦法滿足，而非爲張量場。但是若只考慮常數函數 a，則多出來那項 ($\frac{\partial a}{\partial x^j}=0$) 就消失了，因此條件(a)及(b)確能滿足。

3.4.1 立即能得出定理 3.4.2 之結論：從 R^2 中任意點出發，每次都至少能將積分曲線延伸固定長度 $1/K$，所以這是個完全的向量場。這是充分條件，但不是必要條件。

3.4.3 $f(\gamma(s))>0$，取 $g'(s)=\frac{1}{f(\gamma(s))}>0$，而積分可得函數 $g(s)$。

$$\begin{aligned}X(\gamma(s))&=\gamma_*(s)\\&=\tau_*(g(s))g'(s)\\&=g'(s)X(\tau g(s))f(\tau g(s))\\&=g'(s)f(\gamma(s))X(\gamma(s))\end{aligned}$$

或即 $$f(\gamma(s))g'(s)=1$$

3.4.4 解 $\frac{dx}{du}=1$；$\frac{dy}{du}=e^{-y}$ 所以可得通解爲：

$$x=u+a\quad;\quad y=\ln(u+b)$$

可見這時解曲線 (x, y) 在 $u\leq b$ 時沒有定義，而無法定義在整個 R 上，因此不是完全的向量場。

3.4.5 $\frac{dx}{du}=1$；$\frac{dy}{du}=x^2$；$\frac{dz}{du}=(3y-x^3)$。所以通解爲：

$$x=u+a\ ;$$
$$y=\frac{1}{3}u^3+au^2+a^2u+b\ ;$$
$$z=(3b-a^3)u+c$$

3.6.1 $X(s)=\mu_{s*}X=X$，所以$X(s)$沿著$\gamma(s)$根本是常數函數，而其對s的微分當然爲零，此即$L_X X=0$。

3.6.2 $df=(\partial_i f)dx^i$，可見

$$(X(df))_i=X(\partial_i f)+(\partial_\alpha f)\partial_i X^\alpha$$
$$=X^\alpha\partial_\alpha\partial_i f+\partial_\alpha f\partial_i X^\alpha$$

$d(Xf)=d(X^\alpha\partial_\alpha f)=\partial_i(X^\alpha\partial_\alpha f)dx^i$，所以

$$d(Xf)_i=\partial_i(X^\alpha\partial_\alpha f)$$
$$=\partial_i X^\alpha\partial_\alpha f+X^\alpha\partial_i\partial_\alpha f$$

兩者顯然相等。

3.6.3 $T=\{T^i_{jk}\}$，$(CT)_k=T^\beta_{\beta k}$，$(L_X CT)_k=XT^\beta_{\beta k}+T^\beta_{\beta\alpha}\partial_k X^\alpha$。

$$(L_X T)^i_{jk}=XT^i_{jk}-T^\alpha_{jk}\partial_\alpha X^i+T^i_{\alpha k}\partial_j X^\alpha+T^i_{j\alpha}\partial_k X^\alpha$$
$$C(L_X T)_k=(L_X T)^\beta_{\beta k}$$
$$=XT^\beta_{\beta k}-T^\alpha_{\beta k}\partial_\alpha X^\beta+T^\beta_{\alpha k}\alpha_\beta X^\alpha+T^\beta_{\beta\alpha}\partial_k X^\alpha$$
$$=(L_X CT)_k$$

3.6.4 令$X=\{X^i\}$，$Y=\{Y^i\}$，$\theta=\{\theta_i\}$，則等式右邊爲：

$$\langle L_X Y,\theta\rangle+\langle Y,L_X\theta\rangle$$
$$=(XY^i)\theta_i-Y^\alpha(\partial_\alpha X^i)\theta_i+Y^i(X\theta_i)+Y^i\theta_\alpha(\partial_i X^\alpha)$$
$$=(XY^i)\theta_i+Y^i(X\theta_i)$$
$$=X\langle Y,\theta\rangle$$

3.6.5
$$XYf-YXf=X(Y^i\partial_i f)-Y(X^i\partial_i f)$$
$$=(XY^i)\partial_i f+Y^iX(\partial_i f)-(YX^i)\partial_i f-X^iY(\partial_i f)$$
$$=(XY^i-YX^i)\partial_i f+Y^iX^j(\partial_j\partial_i f)-X^iY^j(\partial_j\partial_i f)$$
$$=(XY^i-Y^\alpha\partial_\alpha X^i)\partial_i f$$
$$=(L_X Y)^i\partial_i f$$
$$=(L_X Y)f$$

3.6.8 (c)
$$(L_{fX}Y)^i=(fX)Y^i-Y^\alpha\partial_\alpha(fX)^i$$
$$=fXY^i-Y^\alpha(\partial_\alpha f)X^i-Y^\alpha f\partial_\alpha X^i$$
$$=f(L_X Y)^i-(Yf)X^i$$

$$= (f(L_X Y) - (Yf)X)^i$$

可見 $L_{fX}Y = fL_X Y - (X \otimes df)(Y)$

或即 $L_{fX} = fL_X - D_{X\otimes df}$

3.6.11 $g_{ij} = \delta_{ij}$, $X^1 = ax - by$, $X^2 = bx + ay$

$$(L_X g)_{ij} = Xg_{ij} + g_{\alpha j}\partial_i X^\alpha + g_{i\alpha}\partial_j X^\alpha$$

$$\begin{aligned}(L_X g)_{11} &= g_{11}\partial_1 X^1 + g_{11}\partial_1 X^1 \\ &= 2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(L_X g)_{12} &= g_{22}\partial_1 X^2 + g_{11}\partial_2 X^1 \\ &= b - b \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(L_X g)_{21} &= g_{11}\partial_2 X^1 + g_{22}\partial_1 X^2 \\ &= -b + b \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(L_X g)_{22} &= g_{22}\partial_2 X^2 + g_{22}\partial_2 X^2 \\ &= 2a\end{aligned}$$

所以 $(L_X g)_{ij} = 2a\delta_{ij} = (2ag)_{ij}$ ，而得證 $L_X g = 2ag$ 。

3.7 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ，因此

$$\partial_r = \cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y$$

$$\partial_\theta = -r\sin\theta\,\partial_x + r\cos\theta\,\partial_y$$

而有
$$\partial_x = \cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta$$

$$\begin{aligned}[\partial_x, \partial_r] f &= \partial_x\partial_r f - \partial_r\partial_x f \\ &= -\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\end{aligned}$$

所以得證 $[\partial_x, \partial_r] = -\dfrac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta$

3.7.1 $X = z\partial_y - y\partial_z$, $Y = x\partial_z - z\partial_x$, $Z = y\partial_x - x\partial_y$ 分別被指定爲 i , j , k 。計算 $[X, Y]f$ ，能得出就等於 Zf，因此 X 與 Y 的李乘積是 Z ，而正好 $i \times j = k$ 。同樣有 $[Y, Z] = X$; $[Z, X] = Y$ ，這對應到 $j \times k = i$ 以及 $k \times i = j$ 。

3.7.2 $U = aX + bY + cZ$

$$\begin{aligned}&= (cy - bz)\partial_x + (az - cx)\partial_y + (bx - ay)\partial_z \\ &= \frac{dx}{dt}\partial_x + \frac{dy}{dt}\partial_y + \frac{dz}{dt}\partial_z\end{aligned}$$

則有 $(a, b, c)\cdot(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = acy - abz + baz - bcx + cbx - acy = 0$，因此流線 $(x(t), y(t), z(t))$ 總與固定軸互相正交，而爲環繞這固定軸的旋轉。$-\mu U = -(a, b, c)$，考慮 $-(a, b, c)\times(x, y, z)$，容易計算得知這就等於 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$。可見 $-\mu U$ 可以認爲是這旋轉的角速度，而且又證得這繞 (a, b, c) 軸的轉動確實是個旋轉運動。

3.8.1 (a) $[\frac{d}{du}, u\frac{d}{du}] = \frac{d}{du}$；

(1) $\frac{dx}{du} = 1$，$\therefore x = u + 0 = u$，$\therefore x_1 = s$；

(2) $\frac{dx}{du} = s + u$；$\therefore x = su + \frac{1}{2}u^2 + s$，$\therefore x_2 = s + s^2 + \frac{1}{2}s^2$

$$= s + \frac{3}{2}s^2$$

(3) $\frac{dx}{du} = -1$，$\therefore x = -u + (s + \frac{3}{2}s^2)$，$\therefore x_3 = \frac{3}{2}s^2$

(4) $\frac{dx}{du} = \frac{3}{2}s^2 - u$，$\therefore x = \frac{3}{2}s^2u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}s^2$

$\therefore x_4 = s^2 + \frac{3}{2}s^3$。符合。

(b) $[\partial_x, x\partial_y] = \partial_y$

(1) $\frac{dx}{du} = 1$，$\frac{dy}{du} = 0$，$\therefore x_1 = s$，$y_1 = 0$。

(2) $\frac{dx}{du} = 0$，$\frac{dy}{du} = s + u$，$\therefore x_2 = s$，$y_2 = \frac{3}{2}s^2$。

(3) $\frac{dx}{du} = -1$，$\frac{dy}{du} = 0$，$\therefore x_3 = 0$，$y_3 = \frac{3}{2}s^2$。

(4) $\frac{dx}{du} = 0$，$\frac{dy}{du} = \frac{3}{2}s^2 - u$，$\therefore x_4 = 0$，$y_4 = s^2 + \frac{3}{2}s^3$，符合。

3.9.1 若 φ 非正則，存在 $v, w \in M_m$ 使得 $\varphi_* v = \varphi_* w$，因此

$$\begin{aligned}\varphi^* g(v - w, v - w) &= g(\varphi_*(v - w)\varphi_*(v - w)) \\ &= g(0, 0) = 0\end{aligned}$$

可見 φ^*g 不再是正定的，而非爲黎曼測距。

3.9.2 在一般點（$t>1$）：$x=\sqrt{t^2-1}\cos\theta$，$y=\sqrt{t^2-1}\sin\theta$，$z=t$。取

$$X=(-\sqrt{t^2-1}\sin\theta,\ \sqrt{t^2-1}\cos\theta,\ 0)$$

$$Y=\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cos\theta,\ \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\sin\theta,\ 1\right)$$

則 X，Y 是在這點的一組基切向量。

$$\begin{aligned} h_{21}=h_{12}&=\varphi^*h(X,Y)=g(X,Y)\\ &=-t\sin\theta\cos\theta+t\sin\theta\cos\theta-0\\ &=0\\ h_{11}&=\varphi^*h(X,X)=(t^2-1)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\ &=t^2-1>0\\ h_{22}&=\varphi^*k(Y,Y)=\frac{t^2}{t^2-1}-1\\ &=\frac{1}{t^2-1}>0 \end{aligned}$$

特別若考慮最低點（0，0，1），則 $X=(1,0,0)$，$Y=(0,1,0)$ 爲兩個切向量彼此線性無關。$h_{11}=1$，$h_{12}=h_{21}=0$，$h_{22}=1$。

可見 h 在 M 上具有正定性，而爲黎曼測距。

3.10.1 (c) 臨界點爲 x 軸及 y 軸。滿足 $H_f\neq 0$ 之臨界點構成正 x 軸，負 x 軸，正 y 軸及負 y 軸等四個子流形。不封閉。（0，0）爲滿足 $H_f=0$ 之臨界點。

(d) 這是 x 軸與 y 軸的聯集，因此並非子流形。因爲在原點的構造不一樣。

3.10.3 f 必定具最大點及最小點，所以至少有兩個臨界點，但是每個臨界點皆爲孤立的，因此可以取一個開鄰域，其中不再含其他臨界點。假設 M 中含有無窮多個臨界點，則必定有一個極限點也爲臨界點，這極限點就不符合上述孤立的條件了。

3.11.1 $X_1=-Z=-y\partial_x+x\partial_y$；$X_2=-Y=-x\partial_z+z\partial_x$，$m=(1,0,0)$，$X_2$ 之方程式（流線）爲：

$$\frac{dx}{dt}=z,\ \frac{dy}{dt}=0,\ \frac{dz}{dt}=-x$$

所以 ${}^{1}\mu_{t}m=(\cos t, 0, -\sin t)$，而得 ${}^{2}\mu_{s_2}m=(\cos s_2, 0, -\sin s_2)$，但是 X_1 之方程式（流線）爲：

$$\frac{dx}{dt}=-y, \frac{dy}{dt}=x, \frac{dz}{dt}=0$$

所以 ${}^{1}\mu_{s_1}(\cos s_2, 0, -\sin s_2)=(\cos(s_1+s_2), \sin s_1, -\sin s_2)$

3.12.2 $[\partial_x+x\partial_y, \partial_y+y\partial_z]=x\partial_z$，這向量與另兩個顯然線性無關，因此 $\bar{D}$ 之維數爲三，而只能有常數解。

3.12.3 $[\partial_y+x\partial_z, \partial_x+y\partial_w]=\partial_w-\partial_z$，這向量與前兩向量線性無關。可是卻有 $[\partial_y+x\partial_z, \partial_w-\partial_z]=0$，$[\partial_x+y\partial_w, \partial_w-\partial_z]=0$。可見 $\bar{D}$ 只能是三維的，而此方程式系統只有一個獨立的解。

3.C.1 (e) 任何兩個相交鄰域，其局部座標爲 (x^i, a^i)，(y^i, b^i)，而其中 $b^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}a^j$。因此這兩局部座標間之轉換方陣爲一個 $2d\times 2d$ 方陣，其左上角及右下角皆爲 $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ 這 $d\times d$ 方陣，而其餘地方爲零，因此其行列式值爲 $\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|^2>0$。可見一定是可具號的。

第四章

積分理論

4.1 導論

在所有各類型的張量場當中，反對稱的順變張量場，或即：微分形（或稱微分形式），大概可算是最常遭遇而又有最廣用途的了。在電磁理論中有關Maxwell 的方程式若用微分形來加以表示會寫得十分簡潔，而且當我們換成考慮相對論之時空的時候其形狀也不受影響。de Rham 曾經使用微分形來表達一個流形之拓樸結構與此流形上之向量分析中的某些性質之間重要的關係。在有名的法國數學大師 E. Cartan 的研究工作裏，他更專擅使用微分形來發展他有關微分系統及黎曼幾何裏各種深刻的定理。另外當我們想把古典向量分析中所熟知的 Stokes 定理以及散度定理推廣到高維歐氏空間或者更一般的空間時，我們必須運用有關微分形的一套運作及語言才能講得簡潔明白。本章的主題正是預備用來介紹並發展這一套非常方便的微分形理論，並說明如何將其融入積分理論以及有關切子束研究的對偶做法當中。

從第二節到第五節我們給出有關微分形的計算及運作法則。其中所涉及的代數部分其實在第 2.18 節時已經講過，但是我們這兒適當的修改這代數的符號並於第四節引入新的**內消積運算**（interior product）。至於所涉及的解析部分我們就定義了微分運算並導引其性質。這個簡易的外微分運算實際上推廣並統一了向量分析中所處理的運算，如**梯度算子**（gradient operator），**旋度**（curl）算子以及**散度**（divergence）算子等。此外它也在切子束的對偶理論中取代了李乘積運算所扮演的角色。

接著我們敍述積分理論可以在其上運作的那些東西，在第六節我們引入邊界算子，它在積分理論中扮演著舉足輕重的角色。在第七節我們回顧 R^d 上函數之多重積分的基本性質。所有前面幾節的資料就在第八、九兩節加以綜合運用而得出一套漂亮的積分理論告訴我們如何將微分形在流形

中具號的參數化領域之上加以積分。這理論於發展到廣義的 Stokes 定理時算是達到了最高潮。

在最末了的第十節我們回過頭來考慮第 3.11 及 3.12 節中的材料，我們說明在對偶的講法中一個對合的切子束到底對應到什麼觀念。

4.2 微分形式（簡稱微分形）

一個 C^{∞} 反對稱的順變 $(0, p)$ 型張量場通常就稱爲一個 p 微分形或簡稱爲 p 形（p-form）。因此一個 0 形就是一個實值的平滑函數，一個 1 形就是第 3.2 節中所考慮並定義的單微分形或簡稱單形。如果 d 爲所考慮流形之維數而 $p > d$，則任何 p 形皆等於零，或說沒有什麼 p 形。

假設 x^i 爲一組局部座標，則 dx^i 已知構成單形的一組局部基，此即：任何單形在局部上（在此座標鄰域中）都可表爲 $f_i dx^i$，其中 f_i 爲一些平滑函數。我們可以使用外積運算從這些 dx^i 來生成較高次之微分形的局部基。因此 $\{dx^i \wedge dx^j \mid i < j\}$ 構成 2 形的一組局部基，而 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$ 爲 d 形的一個局部基。

由於在本章裏所考慮的乘積全是外積而非其他的乘積像對稱積或張量積等，因此在座標微分形之間的外積符號我們爲簡便計全都加以省略。所以當我們寫 $dx^i dx^j$ 時實際的意思是指 $dx^i \wedge dx^j$。此外我們知道 p 形的一組局部基應由 $\binom{d}{p}$ 個**座標** p **形**（coordinate p-form）$dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}$（其中 $i_1 < \cdots\cdots < i_p$）所組成，因此我們將採用如下的取和慣用法，以 $(i_1 \cdots i_p)$ 來代表對所有這組基中的 p 形取和。例如當 $d = 3$ 時有：

$$a_{(i_1 i_2)} dx^{i_1} dx^{i_2} = a_{12} dx^1 dx^2 + a_{13} dx^1 dx^3 + a_{23} dx^2 dx^3 .$$

由於我們也需要考慮把一些座標微分形不見得按照遞增秩序加以取其外積，所以我們也仍繼續保留以前的取和慣用法。如果 μ 是一個 p 形，則對於一組遞增指標的基 $\{dx^{(i_1} \cdots \cdots {}^{i_p)}\}$ 可把 μ 寫成 $f_{(i_1, \ldots, i_p)} dx^{i_1} \cdots\cdots dx^{i_p}$，我們就說這些係數函數 $f_{i_1 \ldots i_p}$ 爲 μ 的**成分**（component），因此這兒的成分並不是像第二章裏對一組張量積之基 $\{dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}\}$ 所表示出來的成分。例如像上面的實例，2 形 $a_{(i_1 i_2)} dx^{i_1} dx^{i_2}$ 的成分爲 a_{12}，a_{13} 以及 a_{23}。如果使用第二章的用法，則由於：

$$dx^{i_1}\,dx^{i_2} = \tfrac{1}{2}(dx^{i_1}\otimes dx^{i_2} - dx^{i_2}\otimes dx^{i_1}),$$

可計算得此（0，2）型之張量場的成分應爲：

$$b_{11}=0,\ b_{12}=\tfrac{1}{2}a_{12},\ b_{13}=\tfrac{1}{2}a_{13},\ b_{21}=-b_{12},\cdots\cdots \text{等等}$$

由於 p 形具有反對稱性，因此在談論其成分時，我們有時也多加入幾個非遞增指標的係數。例如我們也取 $a_{11}=0$，$a_{21}=-a_{12}$，$a_{31}=-a_{13}$ 等等。

習題 4.2.1 (a) 試證基形（basis form）在基向量場上所取之值可寫爲：

$$dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}(\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_p}) = \frac{1}{p!}\,\delta^{i_1}_{j_1}\cdots\delta^{i_p}_{j_p},$$

其中 $i_1\cdots\cdots i_p$ 及 $j_1\cdots\cdots j_p$ 爲任意兩組遞增的指標集。

(b) 假設 p 形 θ 之成分爲 $\theta_{i_1\ldots i_p}$，試證：

$$\theta(\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_p}) = \frac{1}{p!}\,\theta_{j_1\cdots j_p}.$$

4.3 外導數

一個 p 形 θ 之**外導數**（exterior derivative）是一個（$p+1$）形，我們通常記之爲 $d\theta$。當 $p=0$ 時我們已於公式（1.8.5）定義 df。在下面我們要對一般的 p 以數種方法來定義其外導數。

(a) 當我們把微分形表示成座標的寫法時，外導數運算 d 只不過作用於那些成分函數而已：

$$d\theta = (d\theta_{(i_1\cdots i_p)})\wedge dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}. \tag{4.3.1}$$

由於此式右邊與座標 x^i 之選取有關，因此單憑這式子我們還無法立刻知道這定義式是否眞的定義出什麼東西來。可是另方面我們卻立即能證明這個公式滿足下面所要提有關外運算 d 的所有公設。由於這些公設是跟座標無關的，而且這些公設完全決定 d，因此得知（4.3.1）式在座標變換之下

能夠維持不變。

當$M=R^3$而且選用卡氏座標 x, y, z 之時，（4.3.1）式的形狀就全然像通常向量分析裏所談論的grad，curl 及 div 算子了：

$$\begin{aligned}
p=0\ ,\qquad & df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz,\\
p=1\ ,\qquad d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) &= df\wedge dx + dg\wedge dy + dh\wedge dz\\
&= (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)\wedge dx\\
&\quad + (g_x\,dx + g_y\,dy + g_z\,dz)\wedge dy\\
&\quad + (h_x\,dx + h_y\,dy + h_z\,dz)\wedge dz\\
&= (h_y - g_z)\,dy\,dz + (f_z - h_x)\,dz\,dx\\
&\quad + (g_x - f_y)\,dx\,dy,\\
p=2\ ,\ d(f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy) &= df\wedge dy\,dz + dg\wedge dz\,dx\\
&\quad + dh\wedge dx\,dy\\
&= (f_x + g_y + h_z)\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

這兒的下標代表偏導數。爲了看明這兒外運算與grad，curl 及div算子的對應關係，我們可以在R^3中引入歐氏內積。在此通常**內積**（inner product）運算之下在每點 dx, dy, dz 都構成一組正交單元基。因此我們可以建立逆變向量與順變向量之間如下的同構關係：

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \leftrightarrow a\,dx + b\,dy + c\,dz;$$

所以我們全都來考慮順變向量。現在取用 $dxdydz$ 所給的符號，則由Hodge 算子（2.22）式有：

$$*dx = dy\,dz,\ *dy = dz\,dx,\ *dz = dx\,dy,\ *(dx\,dy\,dz) = 1,$$

至於其他的資料則可由 $**$ ＝恒等映射來表明。因此有：

$$\begin{aligned}
*d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) &= (h_y - g_z)\,dx + (f_z - h_x)\,dy + (g_x - f_y)\,dz,\\
d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) &= f_x + g_y + h_z.
\end{aligned}$$

這樣看出若把 curl 及 div 看成作用於單形，則他們的順變形狀只不過是 curl $=*d$ 及 div $=*d*$。而當然grad 的順變形狀就是 d 本身：grad $=d$，就是對 0 形求其外導數。

(b) 外運算 d 具有一些重要的性質。而且這些性質可以反過來完全決定 d 。因此可以將其認爲是 d 的公設：

(1) 如果 f 是個 0 形，則 df 這個單形就等於以前所給的定義。此即對於每個向量場而言，都有：

$$df(X) = Xf$$

(2) d 滿足外積法則如下：如果 θ 爲 p 形而 τ 爲 q 形則

$$d(\theta \wedge \tau) = d\theta \wedge \tau + (-1)^p \theta \wedge d\tau;$$

因此 d 是個導運算。

(3) 當連續兩次以 d 作用時，其結果總爲零而有 $d^2=0$ 。因此對任何 p 形都有 $d(d\theta)=0$。在選取公設系統以完全決定 d 時，只需要求對任意 0 形 f 都滿足 $d(df)=0$ 便可。

(4) 運算 d 是線性的。這兒只需假設加法可拆開，此即對於任意兩個 p 形 θ 及 τ 都有：$d(\theta + \tau) = d\theta + d\tau$ 。至於另外 $d(\alpha\theta) = \alpha d\theta$ 的性質可以由(1)及(2)得來。

事實上 (4.3.1) 式這種座標定義式只不過是這些公設的立即結論。因爲根據(2)及(3)我們都有：

$$\begin{aligned} d(dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}) = (d^2x^{i_1}) \wedge dx^{i_2}\cdots dx^{i_p} - dx^{i_1} \wedge (d^2x^{i_2}) \wedge dx^{i_3}\cdots dx^{i_p} \\ +\cdots+ (-1)^{p-1} dx^{i_1}\cdots dx^{i_{p-1}} \wedge d^2 x^{i_p} = 0. \end{aligned}$$

因此只好：

$$\begin{aligned} d(f\, dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}) &= df \wedge dx^{i_1}\cdots dx^{i_p} + fd(dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}) \\ &= df \wedge dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}, \end{aligned}$$

這結果再加上公設(4)有關線性的要求立即得出 (4.3.1) 式。

反過來要證明 (4.3.1) 式能滿足全部這些公設也不難做。顯然(1)與(4)當然成立，現在爲證明(2)我們必須使用下面十分易證的性質：$d(fg) = (df)g + f\,dg$ 。這時 $\theta \wedge \tau$ 的成分可表爲 θ 與 τ 個別成分之乘積的和，因此對這和施用上等式就給出兩部分，經過適當整理後就得出(2)式。這些計

算簡單寫來可表成：

$$d(\theta\wedge\tau)=\frac{1}{p!q!}\,d(\theta_{i_1\cdots i_p}\tau_{j_1\cdots j_q})\wedge dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}\,dx^{j_1}\cdots dx^{j_q}$$

$$=\frac{1}{p!q!}\,[d\theta_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}\tau_{j_1\cdots j_q}\,dx^{j_1}\cdots dx^{j_q}$$

$$+\theta_{i_1\cdots i_p}(-1)^p\,dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}\wedge d\tau_{j_1\cdots j_q}\wedge dx^{j_1}\cdots dx^{j_q}].$$

而這就是 $d\theta\wedge\tau+(-1)^p\theta\wedge d\tau$。其中因子 $1/p!q!$ 出現的緣故是由於我們無法保持 $i_1\cdots i_pj_1\cdots j_q$ 總是維持遞增的秩序，因此有許多項會重複出現。其中對 θ 有 $p!$ 的重複項，而對 τ 有 $q!$ 的重複項。

公設(3)通常就稱爲 Poincaré 引理。要證明（4.3.1）式確能滿足公設(3)只需注意通常求函數之偏導數是跟其秩序無關的，但是對於微分形之外積運算卻具反對稱性，所以會使得每一項之係數正負相抵而變爲零。在歷史上也有人把這公設之逆：「如果 $d\theta=0$，則存在某個 τ 滿足 $\theta=d\tau$」當做 Poincaré 引理。

(c) 使用微分形在一些向量場上所取的值，我們也可以寫出有關 d 的定義式，是與座標無關的內在（intrinsic）公式。由於這公式中牽涉到兩個向量場的李乘積，可見我們是否能給出 p 形的內在的導數其實取決於我們是否能給出兩個向量場之內在的乘積。這兒我們只就 $p=0,1,2$ 之情形來給出這些公式，他們是最常被使用的情形。

設 f 爲一個 0 形：$df(X)=Xf.$

設 θ 爲一個單形：$d\theta(X,Y)=\frac{1}{2}\{X\theta(Y)-Y\theta(X)-\theta[X,Y]\}$
$=\frac{1}{2}(X\langle Y,\theta\rangle-Y\langle X,\theta\rangle-\langle[X,Y],\theta\rangle).$

設 θ 爲一個 2 形，則有：

$$d\theta(X,Y,Z)=\tfrac{1}{3}\{X\theta(Y,Z)+Y\theta(Z,X)+Z\theta(X,Y)$$
$$-\theta([X,Y],Z)-\theta([Y,Z],X)$$
$$-\theta([Z,X],Y)\}.$$

在上面這些公式中的係數 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 等等可以藉著適當改變外積運算的定義而

加以消除。如果定義一個 p 形與一個 q 形的外積爲原先定義的外積乘以係數 $(p+q)!/p!q!$ ，則上面的公式中就不再有什麼係數。這兩種定義法目前都同時通用。我們在本書就維持使用原先的定義。

習題 4.3.1 試證公設(2)統一了下列向量分析中的公式：

(a) $\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g.$
(b) $\operatorname{curl}(f\theta) = \operatorname{grad} f \times \theta + f \operatorname{curl} \theta.$
(c) $\operatorname{div}(f\theta) = \operatorname{grad} f \cdot \theta + f \operatorname{div} \theta.$
(d) $\operatorname{div}(\theta \times \tau) = \operatorname{curl} \theta \cdot \tau - \theta \cdot \operatorname{curl} \tau.$

提示：使用下列關係式 $\theta \times \tau = *(\theta \wedge \tau)$ 及 $\theta \cdot \tau = *(*\theta \wedge \tau) = *(\theta \wedge *\tau)$。

習題 4.3.2 試證公設(3)可立即給出：

(a) $\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0.$
(b) $\operatorname{div} \operatorname{curl} f = 0.$

習題 4.3.3 (a) 試證通常作用於函數上的 Laplace 算子可以寫成：

$$\nabla = \operatorname{div} \ \operatorname{grad} = *d*d.$$

(b) 圓柱面座標 r，θ，z 的座標向量 $\partial_r, \partial_\theta, \partial_z$ 彼此正交而且其長度分別爲 1，r，1 。因此對於單形而言 $dr, r\,d\theta, dz$ 是一組互相正交的單元順變基，而且具有正號。因此關於 Hodge 算子的圓柱面座標公式可寫爲：

$$*dr = r\,d\theta\,dz, \qquad *d\theta = \frac{1}{r}\,dz\,dr, \qquad *dz = r\,dr\,d\theta, \qquad *(dr\,d\theta\,dz) = \frac{1}{r}.$$

試使用這些資料以求得 Laplace 算子 $*d*d$ 的圓柱面座標公式。

(c) 試以類似作法求出 $*d*d$ 在球面座標中的表達式。

習題 4.3.4 (a) 使用 R^3 中的卡氏座標來計算 $d*d* - *d*d$ 運算子如何作用於單形之上。

(b) 使用這結果以導引 R^3 上作用於向量場之 Laplace 算子的公式爲：

$$\nabla^2\theta = \text{grad div } \theta - \text{curl curl } \theta.$$

(c) 試證對於 R^3 上的 p 形而言，Laplace 算子與 $d*d* - *d*d$頂多只相差一個符號。注意 d 作用於 3 形變成 0，因此對於 0 形而言，$d*d*$ 作用的結果為零，而使得只剩下一 $*d*d$ 這項，這與上題的結果一致。

4.4 內消積

給定一個向量場 X，我們可以對任意 p 形考慮其與 X 的**內消積**（interior product）。這就是對 p 形施加一個運算或算子 $i(X)$ 以得出一個 $(p-1)$ 形，其作用法基本上就是取 X 做為 θ 的第一個變數，而使其他 $(p-1)$ 個變數作為 $(p-1)$ 形 $i(X)\theta$ 的變數。因此對於任意 $(p-1)$ 個向量場 X_1，……，X_{p-1} 我們定義

$$[i(X)\theta](X_1, \ldots, X_{p-1}) = p\theta(X, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

如果 θ 是 0 形，則特別定義 $i(X)f = 0$。

實例 現在來計算 $i(\partial_1)$ 對 p 形之基 $dx^{i_1} \cdots\cdots dx^{i_p}$ 的作用，其中假設這些指標是遞增的：$i_1 < \cdots\cdots < i_p$。

(a) 第一種情形假設 $i_1 \neq 1$，這時對於任意一組 $j_1 < \cdots < j_{p-1}$，都有

$$\begin{aligned} i(\partial_1)(dx^{i_1}\cdots dx^{i_p})(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_{p-1}}) &= p\, dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}(\partial_1, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_{p-1}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

請參看習題 4.2.1。可見既然所有的成分均為零，因此必定

$$i(\partial_1)(dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}) = 0$$

(b) 接下來假設 $i_1 = 1$。如果 $(i_2, \ldots, i_p) \neq (j_1, \ldots, j_{p-1})$ 則當然

$$p\, dx^1\, dx^{i_2}\cdots dx^{i_p}(\partial_1, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_{p-1}}) = 0$$

可是如果 $(i_2, \ldots, i_p) = (j_1, \ldots, j_{p-1})$ 的話，那麼上式的值就等於 $p/p! =$

$1/(p-1)!$ 。可是這些值就是 $(p-1)$ 形 $dx^{i_2}\cdots dx^{i_p}$ 在同樣這組 $(\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{p-1}})$ 之上所取的值，可見我們有：

$$i(\partial_1)(dx^1\, dx^{i_2}\cdots dx^{i_p}) = dx^{i_2}\cdots dx^{i_p}.$$

使用 $i(\partial_1)$ 這運算所具有的線性性質我們就可得出它作用於任何微分形之時所能得到的結果。

定理 4.4.1 $i(X)$ 是作用於微分形的一個導運算，此即對於任意 p 形 θ 與 q 形 τ，下列關係式都能滿足：

$$i(X)(\theta\wedge\tau) = i(X)\theta\wedge\tau + (-1)^p\theta\wedge i(X)\tau.$$

這樣我們就說外導數 d 是個一階的導運算，而說 $i(X)$ 爲一個負一階的導運算。

證明 由定義顯然 $i(X)\theta$ 在某點之值只跟 X 與 θ 在該點所指定之值有關。因此如果 X 在該點之值爲 0，則上面公式之左右兩邊均爲零而自然相等。只剩下需要考慮 $X\neq 0$ 的情況，這時可以適當選取座標系統使得 $X=\partial_1$。

將 θ 及 τ 寫成這組座標的表達式，使用外積運算的分配性質以及 $i(\partial_1)$ 的線性性質立即可看出我們只需就 θ 與 τ 分別爲 p 形基與 q 形基 $dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}$ 及 $dx^{j_1}\cdots dx^{j_q}$ 之時，證明此式爲眞就夠。但是這時可以仿照前面實例中的做法，分別就 i_1 與 j_1 是否等於 1 而分成四種情況來考慮。其做法十分簡單，所以就留給讀者自行驗證了。□

內消積運算的合成運算具有反對稱性，此即：

$$i(X)i(Y) = -i(Y)i(X)$$

因爲

$$i(X)i(Y)\theta(\cdots) = (p-1)\, i(Y)\theta(X,\ldots)$$

$$
\begin{aligned}
&= p(p-1)\theta(Y, X, \ldots) \\
&= -p(p-1)\theta(X, Y, \ldots) \\
&= -i(Y)i(X)\theta(\cdots).
\end{aligned}
$$

既然如此可見合成運算 $i(X)i(Y)$只跟$X \wedge Y$ 有關。因此我們可以定義：$i(X \wedge Y) = i(X)i(Y)$。然後藉著要求滿足線性的條件來把這定義推廣到任何反對稱的二次逆變張量A，使得 $i(A)$ 都有意義。這個運算 $i(A)$ 當然是把 p 形映射成一個 $(p-2)$ 形。以類似方法，對於任何一個 r 次的反對稱逆變張量B，我們能定義內消積 $i(B)$，是把 p 形映射成一個 $(p-r)$ 形。

剛才已證明 $i(X)$ 是個導運算，所以可以完全由其對於 0 形及單形之作用來得到決定。因為對於任何 p 形，我們可以將其寫成一些 0 形及單形之外積和，因此重複使用導運算之規則就能完全決定 $i(X)$ 對此 p 形之作用結果。

由於李導數在作用於向量場時就是李乘積，而且在第 4.3 節(c)，外導數運算 d 可用李乘積以及微分形在向量場所取的值來加以表達，因此我們預期所有這些作用於微分形上的運算 L_X，$i(X)$ 與 d 彼此之間會具有某些關連，這就是：

定理 4.4.2 視為微分形上的運算，李導數可表為如下的運算方程式：

$$L_X = i(X)d + di(X).$$

簡寫為 $L = id + di$ 。

證明 由第 3.6 節我們已知 L_X 是個零階的導運算，把原來一個 p 形仍映射成一個 p 形。下面將先證明 $i(X)d + di(X)$ 也是一個導運算：

$$
\begin{aligned}
[i(X)d + di(X)](\theta \wedge \tau) &= i(X)(d\theta \wedge \tau + (-1)^p \theta \wedge d\tau) \\
&\quad + d(i(X)\theta \wedge \tau + (-1)^p \theta \wedge i(X)\tau) \\
&= i(X)\,d\theta \wedge \tau + (-1)^{p+1}\,d\theta \wedge i(X)\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (-1)^p i(X)\theta \wedge d\tau + (-1)^{2p}\theta \wedge i(X)\, d\tau \\
&+ di(X)\theta \wedge \tau + (-1)^{p-1} i(X)\theta \wedge d\tau \\
&+ (-1)^p\, d\theta \wedge i(X)\tau + (-1)^{2p}\theta \wedge di(X)\tau \\
= &(i(X)d + di(X))\theta \wedge \tau + \theta \wedge (i(X)\, d + di(X))\tau.
\end{aligned}
$$

因此只需證明對於 0 形及單形作用起來 L_X 及 $i(X)d + di(X)$ 具有相同的結果，則必定他們對任意 p 形作用的結果也相同，而必須相等。

就 0 形而言 $L_X f = Xf$ ，但是

$$i(X)\, df + di(X)f = i(X)\, df + d0 = df(X) = Xf.$$

所以兩者結果相等。

就單形 df 而言，我們由 $L_X\langle Y, df\rangle = X\langle Y, df\rangle = X(Yf)$ ，以及
$L_X\langle Y\ df\rangle = \langle L_X Y, df\rangle + \langle Y, L_X\, df\rangle = [X, Y], df + \langle Y, L_X\, df\rangle$
可得

$$\langle Y, L_X\, df\rangle = Y\,(Xf\,) = \langle Y, d(Xf)\rangle$$

換言之已證明 $L_X df = d\,(Xf)$ 。

另方面立即也有：

$$
\begin{aligned}
[i(X)d + di(X)]\, df &= i(X)\, d^2 f + di(X)\, df \\
&= 0 + d(Xf).
\end{aligned}
$$

所以這兩個運算對 df 作用的結果也相同。由於他們都滿足乘法規則，所以他們對 gdf 或任意的單形 θ 作用的結果都相同。這樣已證明這兩運算彼此相等。□

系 對於微分形作用時 d 與 L_X 是互相可交換的。此即對任意 p 形 θ 都有 $dL_X\theta = L_X d\theta$ 。

證明 運用上定理及 $d^2 = 0$ 可得兩邊都等於 $di(X)d\theta$ ，因此當然可交換。□

把上面定理改寫成如下的形式：

$$(p+1)\, d\theta(X, \ldots) = [L_X\theta - d(i(X)\theta)](\ldots),$$

我們就看出要決定外導數運算 d 如何作用於 p 形，我們只需知道李導數如何作用以及 d 如何作用於 $(p-1)$ 形就可以。換言之，如果我們已經知道了李導數的某些性質而想要發展出外導數 d 的相應性質時，我們可以試著就所涉及微分形的次數使用歸納法來進行。

習題 4.4.1 (a) 已知 L_X 能夠跟收縮運算互相交換，試證明下列諸性質:

(1) 假設 θ 爲單形：$(L_X\theta)(Y) = X\theta(Y) - \theta[X, Y]$,

(2) 假設 θ 爲 2 形：$(L_X\theta)(Y, Z) = X\theta(Y, Z) - \theta([X, Y], Z) - \theta(Y, [X, Z])$.

(b) 使用公式 $(p+1)\, d\theta(X, \ldots) = L_X\theta(\ldots) - d(i(X)\theta)(\ldots)$ 試證明第 4.3 節(c)中的第二式與第三式。

4.5 Poincaré 引理之逆

考慮 E^3 的向量分析中這些熟知的結果：

(a) 如果 grad $f = 0$，則 f 必定是個常數。

(b) 如果 curl $X = 0$，則存在一個函數 f 滿足 $X =$ grad f。

(c) 如果 div $X = 0$，則存在一個向量場 Y 滿足 curl $Y = X$。

(d) 對於每個函數 f，總存在一個向量場 X 滿足 div $X = f$。

上面所給的這四條敍述都沒有講得很完全。對於(d)來講我們只需加入平滑性的假設而要求 f 爲 C^∞ 函數，那麼這結果總是對。可是對於(a)(b)(c)而言單單加入平滑性的條件仍然無法彌補其缺陷，因爲這時 f 或 X 所定義於其上的定義域之拓樸性質跟這些結果能否成立具有密切的關係。可是在我們的敍述中卻完全忽略了這些拓樸性質之假設。下面我們要給出一些關於(a)，(b)及(c)的反例來說明要是定義域的拓樸性質不夠好，那麼這些結果就不能成立。事實上這些拓樸條件在(a)中是要求 f 的定義域爲連通集合，

在(b)中是要求X的定義域爲**單連通的**（simply connected），此即其中任意單純封閉曲線都可以一直在此定義域中縮小而成爲一點。至於在(c)中則要求在X的定義域中的每一個緊緻曲面必需是定義域中某一有界區域的邊界或**緣**（boundary）。

本節主要的目標就是設法統一並推廣(a)，(b)，(c)及(d)的正確的寫法。因此我們把他們全部換成爲作用於p形之外導數運算的性質來考慮。至於加給定義域的拓樸條件我們則考慮此定義域是某一座標系統中的**座標方塊**（coordinate cube），因爲這要求能得出所有前面所列舉的各種特殊條件。

這兒先分別就(a)，(b)及(c)來給出反例，以說明拓樸條件的重要性。不過爲了方便起見我們考慮相應於(a)，(b)及(c)的有關微分形的問題。

實例 (a) 在 $R^3 - \{(0, b, c) \mid b, c \in R\}$ 這兩個半空間之上定義函數：

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x > 0, \\ -1 & \text{若 } x < 0, \end{cases}$$

則f是個平滑函數而且 $df = 0$ 。但是這時f並非常數。這是因爲f的定義域並非連通所造成的。

(b) 在 $R^3 - \{(0, 0, c) \mid c \in R\}$ 之上我們定義如下的單形：

$$\tau = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

這時$d\tau = 0$ 。在局部上$\tau = d\theta$ ，其中θ代表圓柱面的角座標。可是在整個τ的定義域上我們卻不可能找到一個函數f滿足 $df = \tau$ 。因爲假設這事可能，則對任意曲線γ，以p_0爲起點，以p_1爲終點，我們都有 $\int_\gamma df = fp_1 - fp_0$。因此如果$\gamma$是條封閉曲線則 $\int_\gamma df = 0$ 。可是我們知道在目前這實例中如果取γ爲 xy 平面上反時鐘方向的一個單位圓曲線，則能證明 $\int_\gamma \tau = 2\pi$ 。因此看出τ不可能表爲 df 。這種反例之所以可能乃是由於τ的定義域並非單連通所致。

(c) 取 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 而在$R^3 - \{0\}$之上定義如下的2形：

$$\tau = \frac{1}{r^3}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy).$$

容易證明這個 2 形滿足 $d\tau = 0$。可是在其定義域 $R^3 - \{0\}$ 之上不可能存在任何單形 α 滿足 $d\alpha = \tau$。因爲根據 Stokes 定理，對於任意的單形 α，我們總有 $\int_{S^2} d\alpha = 0$，其中 S^2 代表以原點爲中心的單位球面而且外向的法線爲其符號。可是另方面當我們把 τ 局限於 S^2 時，這個 τ 就是 S^2 上的面積元素，因此有：$\int_{S^2} \tau = 4\pi = S^2$ 之面積。所以有這個反例的原因在於 S^2 是個緊緻的曲面，可是它卻不是 τ 之定義域中的某個有界領域之邊界。儘管這時 τ 的定義域是單連通的。

我們在後面第八節與第九節會正式使用微分形來給出線積分及曲面積分的定義並敍述 Stokes 定理。這兒我們提前使用這些資料以證實這些反例的存在。如果表爲通常向量分析中的寫法，則在(b)及(c)中可以分別改寫成

$$\int_\gamma \tau = \int_\gamma (x^2 + y^2)^{-1} \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$$

以及

$$\int_{S^2} \tau = \iint_{S^2} r^{-3}\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.]$$

如果 p 形 τ 滿足 $d\tau = 0$，則說 τ 是封閉的。當 $p > 0$ 而且如果存在一個 $(p-1)$ 形 θ 滿足 $d\theta = \tau$，則說 τ 是**恰當的**(exact)。至於一個 0 形若其爲常數，則也說是恰當的。如果在 τ 的定義域中的每點 m 總存在一個鄰域 U，使得 τ 局限到 U 上時的 $\tau|_U$ 總爲恰當的，則說 τ 是個**局部恰當的**(locally exact)微分形。顯然如果 τ 爲恰當，則必定亦爲局部恰當。外運算 d 之公設(3)所提到的 Poincaré 引理就指明一個局部恰當的微分形必定具有封閉性。事實上，如果 $\tau|_U = d\theta_U$ 則 $d\tau|_U = d(\tau|_U) = d^2\theta_U = 0$。由於這件事對每點 m 之某鄰域 U 都成立，因此 $d\tau = 0$。這兒我們想來證明 Poincaré 引理的一個局部逆定理：

定理 4.5.1 假設 τ 是個封閉的 p 形，$p=1,\cdots\cdots,d$，則對於 τ 之定義域中的每個方塊座標鄰域 $U=\{m \mid a^i < x^i m < b^i\}$ 而言，總是存在 U 上的一個（$p-1$）形 θ 滿足 $d\theta=\tau|_U$。至於 U 上的一個封閉的 0 形一定在 U 上爲常數。因此，每個封閉的 p 形都是局部恰當的。

證明 對於 0 形 τ，條件 $d\tau=0$ 的意思就是在 U 裏全部的 $\partial_i\tau=0$，$i=1,\cdots\cdots,d$。因此沿著 U 中隨便一條平滑曲線 τ 總是個常數。但是 U 是連通的，因此 τ 在整個 U 上爲常數。

我們不妨假設在座標映射（$x^1,\cdots\cdots,x^d$）之下，R^d 中的原點對應到 U 中之某點，因此假設 $a^i<0<b^i, i=1,\ldots,d$

爲了完成定理之證明，我們繼續來構造出定義於（U 上之）微分形上頭的外導數 d 之代數同倫映射（algebraic homotopy）H。此即對所有的 $p=0,1,\cdots\cdots,d$，H 把一個 p 形映射成一個（$p-1$）形，而能滿足如下條件：

$$Hd\tau+dH\tau=\tau;$$

換言之，$Hd+dH$ 是個作用於微分形上的恒等映射。只要得到了這樣的一個同倫映射 H，則立即可以找到所需用的 θ。因爲由條件 $d\tau=0$ 我們立即得到 $dH\tau=\tau$，因此只需選取 $\theta=H\tau$ 就能滿足 $d\theta=\tau$。

對於其形狀爲：$\alpha=f(x^1,\ldots,x^d)dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}$（其中 $i_1<\cdots\cdots<i_p$）的微分形我們定義 H 爲：

$$H\alpha=\left[\int_0^1 f(0,\ldots,0,tx^{i_1},x^{i_1+1},\ldots,x^d)\,dt\right]x^{i_1}\,dx^{i_2}\cdots dx^{i_p}.$$

如果 α 是個 0 形，則定義 $H\alpha=0$。然後再藉線性來推廣 H 的定義到任何微分形之上。在這定義之下經過一些計算能證明 $Hd\alpha+dH\alpha=\alpha$。在這些計算過程中大概只需注意下列幾件事：第一，求外導數會牽涉到對一個被積分量中所含的參數求其偏導數。根據高等微積分中典型的定理，我們可以把求偏導數之運算調到積分符號之內來進行。第二，我們有下列等式：

$$x^i\,\partial_i f(0,\ldots,0,tx^i,x^{i+1},\ldots,x^d)=\frac{d}{dt}f(0,\ldots,0,tx^i,x^{i+1},\ldots,x^d)$$

以及：

$$tx^i\,\partial_i f(0,\ldots,0,tx^i,x^{i+1},\ldots,x^d)+f(0,\ldots,0,tx^i,x^{i+1},\ldots,x^d)$$
$$=\frac{d}{dt}[tf(0,\ldots,0,tx^i,x^{i+1},\ldots,x^d)]$$

其中並沒有就 i 取和。至於計算的細節就留做習題了。□

實例 這兒實際來示範上面的(b)(c)(d)之結果如何透過H的操作來取得。

(b) 假設 $\tau=f\,dx+g\,dy+h\,dz$, $d\tau=0$ 而且 τ 是定義在一個 R^3 的方塊領域之上。由 $d\tau=0$ 之條件可得偏導數間如下的等式：

$$f_y=g_x,\ f_z=h_x,\ \text{以及}\ g_z=h_y,$$

則 $\theta=H\tau$ 是個 0 形，由下式所給定：

$$\theta(x,y,z)=x\int_0^1 f(tx,y,z)\,dt+y\int_0^1 g(0,ty,z)\,dt+z\int_0^1 h(0,0,tz)\,dt.$$

因此經過計算可得：

$$\begin{aligned}
d\theta=&\left(\int_0^1[f(tx,y,z)+xtf_x(tx,y,z)]\,dt\right)dx\\
&+\left(\int_0^1[xf_y(tx,y,z)+g(0,ty,z)+ytg_y(0,ty,z)]\,dt\right)dy\\
&+\left(\int_0^1[xf_z(tx,y,z)+yg_z(0,ty,z)+h(0,0,tz)+zth_z(0,0,tz)]\,dt\right)dz\\
=&\left(\int_0^1\frac{d}{dt}[tf(tx,y,z)]\,dt\right)dx+\left(\int_0^1\left[xg_x(tx,y,z)+\frac{d}{dt}(tg(0,ty,z))\right]dt\right)dy\\
&+\left(\int_0^1\left[xh_x(tx,y,z)+yh_y(0,ty,z)+\frac{d}{dt}(th(0,0,tz))\right]dt\right)dz
\end{aligned}$$

$$= (f(x, y, z) - 0)\,dx + ([g(x, y, z) - g(0, y, z)] + [g(0, y, z) - 0])\,dy$$
$$+ ([h(x, y, z) - h(0, y, z)] + [h(0, y, z) - h(0, 0, z)] + [h(0, 0, z) - 0])\,dz$$
$$= f\,dx + g\,dy + h\,dz.$$

(c) 如果 $\tau = f\,dx\,dy + g\,dx\,dz + h\,dy\,dz$，則條件 $d\tau = 0$ 給出 $f_z - g_y + h_x = 0$，因此就 $\theta = H\tau$ 我們可寫成：

$$\theta = \left(\int_0^1 f(tx, y, z)\,dt\right)x\,dy + \left(\int_0^1 g(tx, y, z)\,dt\right)x\,dz + \left(\int_0^1 h(0, ty, z)\,dt\right)y\,dz.$$

使用類似的技巧能驗證 $d\theta = \tau$，因此就不再詳述了。

(d) 如果 $\tau = f\,dx\,dy\,dz$ 而取：

$$\theta = \left(\int_0^1 f(tx, y, z)\,dt\right)x\,dy\,dz,$$

則顯然 $d\theta = \tau$。

註：(a) 上面所提到的方塊座標鄰域中 a^i 及 b^i 有時可取爲 $-\infty$ 及 $+\infty$。特別有時可考慮整個 R^d 爲此座標像域。

(b) 除非 τ 是個單形，否則的話滿足條件 $d\theta = \tau$ 之解 θ 顯然並非唯一。事實上假設 α 爲隨便一個 $(p-2)$ 形，則：

$$d(\theta + d\alpha) = d\theta + d^2\alpha = \tau.$$

此外這兒所提到的這種同倫映射 H 並不見得有什麼特別之處。事實上這個 H 的定義還跟座標之排列秩序有關。關於這種同倫映射更一般性的構造法可以參考 H. Flanders 所寫的 Differential Forms, Academic Press, 1963 這本書。

(c) 前面另外也已提及爲了保證一個封閉的 p 形總能夠也是恰當的，那麼就得對此 p 形的定義域加入某些要求。而這些要求是隨著 p 而變化的。例如當 p 爲 0 時只要求定義域爲連通就可，可是若 $p = 1$ 則條件是較強的單連通性。至於 $p = 2$ 時，更需要求任何此定義域中的球形曲面能夠在

定義域中被收縮成一點等等。在一般的情形，de Rham 證明一個定理指出一個流形上大域定義的，又是互相獨立的封閉而且非恰當 p 形的個數正好等於此流形的第 p 個 Betti 數 B_p。這兒的Betti 數就是我們在第3.10節討論摩斯理論時就已遭遇過的那些拓樸不變量。由這定理，令 $B = B_p$，我們可以在流形上找出 B 個封閉的 p 形 $\tau_1, \cdots\cdots, \tau_B$ 滿足如下兩個條件：

(1) 常係數 a^i 的線性組合 $\sum a^i \tau_i$ 若為恰當則必定所有的 a^i 皆為零。

(2) 對於任何封閉的 p 形 τ，一定存在一些常數 a^i 使得 $(\tau - \sum a^i \tau_i)$ 是個恰當的 p 形。

例如 $R^2 - \{0\}$ 的第一個 Betti 數為 $B_1 = 1$，而這時的封閉單形 $(x\,dy - y\,dx)/r^2 = \tau_1$ 就是唯一的獨立單形。事實上，假設 τ 是任何其他在 $R^2 - \{0\}$ 之上的封閉單形，而取 $c = (2\pi)^{-1} \int_{S^1} \tau$，則 $\tau - c\tau_1$ 是個恰當的微分形，其中 S^1 當然代表反時鐘方向的單位圓。事實上由 c 的選用顯然有 $\int_{S^1} \tau - c\tau_1 = 0$，因此根據Green 定理，對於每條封閉曲線 γ 也都有 $\int_\gamma \tau - c\tau_1 = 0$。而知線積分 $\int (\tau - c\tau_1)$ 與路徑無關，因此一個不定積分就有意義而給出一個 0 形 f 滿足 $df = \tau - c\tau_1$。

這兒關於 de Rham 的這個定理我們其實兩方向都可以應用。如果我們已經從別的來源知道了所考慮流形上 Betti 數的資料，則我們就可以申述此流形上存在這麼多個獨立的封閉微分形。反過來，假如我們已經在流形上找到了幾個獨立的封閉微分形，那麼我們就知道Betti 數至少應大於這數目。

實例 取 M 為環面，而令 θ 及 φ 分別代表沿著環面兩個方向的轉動角度。這時 θ 及 φ 都只定義到 2π 的倍數。但是無論 θ 及 φ 怎麼取，所得的 $\tau_1 = d\theta$ 及 $\tau_2 = d\varphi$ 都是一樣。因此這兩個單形都是在整個 M 上有定義的，而不像 θ 與 φ 無法定義於整個 M 之上。現在這兩個 τ_1 及 τ_2 皆為局部恰當，因此他們都具封閉性。τ_1 與 τ_2 沿著曲線上的積分就測量出 θ 與 φ 沿著此曲線的平滑的變化量。由於任何恰當微分形沿著一條封閉曲線的積分肯定為零，因此要是 $a_1\tau_1 + a_2\tau_2$ 為恰當的話，那麼就得到：

$$\int_{\gamma_1} a_1\tau_1 + a_2\tau_2 = 2\pi a_1 = 0,$$
$$\int_{\gamma_2} a_1\tau_1 + a_2\tau_2 = 2\pi a_2 = 0,$$

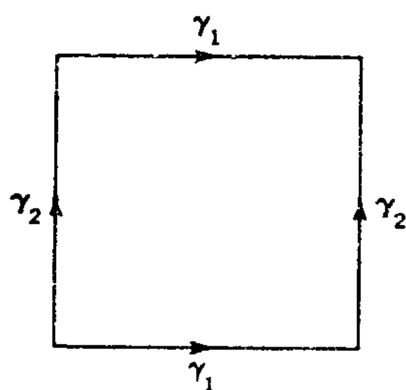


圖 14

其中γ_1及γ_2爲上面圖 14 中代表環面之正方形被認同的兩組對邊。可見τ_1及τ_2互相獨立無關而知M之Betti 數 B_1 至少必須等於2 。另外使用一個只具有兩個鞍點的合適摩斯函數我們也能證明在環面上 $B_1 \leq 2$ ，因此決定這時$B_1 = 2$ 。而知M上已經沒有其他獨立的封閉單形了。

習題 4.5.1 試求向量場X滿足 curl $X = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

習題 4.5.2 請把定理4.5.1中所述在 $p = 2$ 時存在局部解之偏微分方程式以座標的形式寫出來。試問這時的可積分條件爲何。

習題 4.5.3 在$R^d - \{0\}$中試找出一個徑向對稱的(radially symmetric) $(d-1)$形具有封閉性可是卻不是恰當的。使用這微分形試推廣實例(b)及(c)到高維的空間。

4.6 方體鏈

通常我們考慮在其上對p形加以積分的東西是要比p維具號的子流形更一般的。因爲我們是在具號的平滑p方塊(p-cubes)以及他們的形式和(formal sum)，就是所謂方體鏈(chain)之上進行積分。另方面出現於一個應用問題中的積分領域通常也並非直接就給爲方體鏈，因此爲了將此積分理論應用進來，就需熟練如何將一個積分領域參數化而將其表達成

方體鏈的技巧。話又說回來，在數學的應用中我們很少特別對某領域進行參數化，我們卻喜歡指明對於相當廣泛的一類領域，我們都有方法將其參數化，因此既然所處理的領域是可參數化的，所以我們就可以有一組參數來將其表達成方體鏈，而得以把積分理論運用上來。

在R^p（$p>0$）中的一個p方塊U就是在卡氏座標中如下的封閉方塊形鄰域：

$$U = \{(u^1, \ldots, u^p) \mid b^i \leq u^i \leq b^i + c^i, i = 1, \ldots, p\},$$

其中b^i及c^i皆爲給定的一些常數，而 $c^i > 0, i = 1, \ldots, p$。這兒我們都假設這些常數爲有限的，因此$U$爲封閉有界，因此自然是個緊緻集合。

在流形M中的一個C^∞ p方塊α的意思就是一個平滑映射$\alpha : U \to M$，其中U是個R^p中的p方塊。這兒α在閉集合U上的平滑性意指α可以延拓成一個定義於包含U之開集合$U+$之上的C^∞映射。

如果α是個p方塊而ω是R^p上的一個符號，我們就把（α，ω）稱爲一個具號的p方塊。按照附錄三C所給的定義，ω可視爲R^p中的一個圖表集，其中任何兩個圖表之間的賈氏方陣行列式值皆爲正數。可是在本章的用法我們卻以p形來表達這符號ω較爲方便：假設座標x^1，……，x^p與y^1，……，y^p之間的賈氏行列式爲 $J = \det(\partial x^i/\partial y^j)$，則由定理2.19.2 我們知道：

$$dx^1 \cdots dx^p = J\, dy^1 \cdots dy^p$$

因此只要實際比較座標體積元素dx^1……dx^p及dy^1……dy^p我們就可以立即判斷是否這些座標都具有相同的符號。既然在R^p的兩個大域的座標系統u^1，……，u^p及 $-u^1, u^2, \ldots, u^p$ 之中必定有一個其符號與ω的符號相同，因此我們不妨將ω認同爲下面這兩個體積元素當中的某一個：

$$du^1 \cdots du^p \text{ 或者 } d(-u^1)\, du^2 \cdots du^p = -du^1 \cdots du^p.$$

如果$-\omega$代表與ω相反的符號，則說（α，$-\omega$）是（α，ω）的負號方塊。爲了使上面定義達到完全，我們也定義當$p=0$時M中一個0方塊就是M中的一點m。至於一個具號的零方塊就是M中之一點m再配上正一或負一

，此即（m，+1）或（m，−1）。注意這兩個具號零方塊一者爲另一之負號方塊。

假設U就是前面定義中p方塊α之定義域，則定義（$p-1$）方塊：$\alpha_{i\varepsilon}$, $i=1,\ldots,p$, $\varepsilon=0,1$,

$$\alpha_{i\varepsilon}(v^1,\ldots,v^{p-1})=\alpha(v^1,\ldots,v^{i-1},b^i+\varepsilon c^i,v^i,\ldots,v^{p-1}),$$

爲α的（$p-1$）面（face）。其中變數於 $j=1,\ldots,i-1$ 時 $b^j\le v^j\le b^j+c^j$，而於$j=i,\ldots,p-1$時 $b^{j+1}\le v^j\le b^{j+1}+c^{j+1}$。因此$\alpha$具有$2p$個這種（$p-1$）面。至於$\alpha$的其他$k$面，$k=0，1，\cdots\cdots，p-2$等等則分別逐次定義爲$\alpha$之（$k+1$）面的$k$面。我們可簡單用 $\alpha_{i_1\varepsilon_1i_2\varepsilon_2\cdots i_h\varepsilon_h}$ 來加以表示，其中 $h=p-k$。這寫法算是應有寫法 $(\cdots(\alpha_{i_1\varepsilon_1})_{i_2\varepsilon_2}\cdots)_{i_h\varepsilon_h}$ 之簡寫。特別α的零面也叫做頂點，他們是點：

$$\alpha(b^1+\varepsilon_1c^1,\ldots,b^p+\varepsilon_pc^p),$$

因此一共有2^p個頂點。

假設（α，ω）是個具號的p方塊，則我們可以對α的（$p-1$）面$\alpha_{i\varepsilon}$加給一個符號$\omega_{i\varepsilon}$。由於我們希望 $(-\omega)_{i\varepsilon}=-(\omega_{i\varepsilon})$，因此我們就把這條件當做定義的一部分而單只注意 $\omega=du^1\cdots du^p$。這時取

$$\omega_{i\varepsilon}=(2\varepsilon-1)(-1)^{i-1}\,dv^1\cdots dv^{p-1}.$$

在U上滿足$u^i=b^i+\varepsilon c^i$的（$p-1$）面之上，座標（$2\varepsilon-1$）u^i的座標向量是從U的內面指向外方。如果在這個（$2\varepsilon-1$）u^i之後跟入另外（$p-1$）個座標 $(2\varepsilon-1)(-1)^{i-1}v^1,v^2,\ldots,v^{p-1}$，則所得到的座標系統與$\omega$同符號，因爲這時$(-1)^{i-1}$正好抵消掉$u^i$換位所產生的變化。因此對於$U$之邊界面之符號的選擇，我們是採用通常所謂外指法向量（outward pointing normal）的慣用法，如圖15所示。

這時一個具號的1方塊（α，du^1）的零面分別定義爲（$\alpha(b^1)$，−1）以及 $(\alpha(b^1+c^1),+1)$.

可是對於具號p方塊的（$p-2$）面，我們卻無法給出完全一致的符號。事實上我們有如下的：

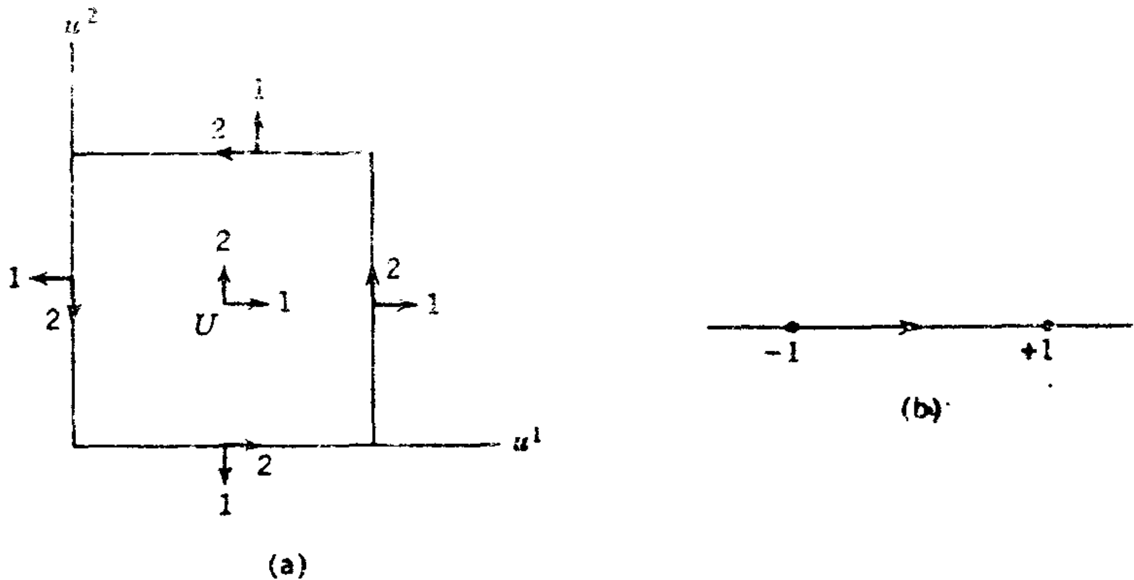
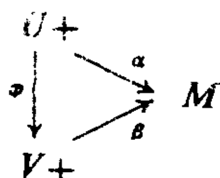


圖 15

定理 4.6.1 假設 α 是個 p 方塊（$p>1$），ω 是 α 的一個符號，而 $1\leq i<j\leq p$。則（$p-2$）面 $\alpha_{i\delta(j-1)\varepsilon}$ 與 $\alpha_{j\varepsilon i\delta}$ 其實爲 α 的同一個（$p-2$）面。可是由 ω 透過 $\alpha_{i\delta}$ 與 $\alpha_{j\varepsilon}$ 所給的符號卻正好彼此相反。此即：$\omega_{i\delta(j-1)\varepsilon}=-\omega_{j\varepsilon i\delta}$.

證明 顯然 $\alpha_{i\delta(j-1)\varepsilon}$ 及 $\alpha_{j\varepsilon i\delta}$ 都是從 α 藉著限制 u^i 及 u^j 分別爲 $b^i+\delta c^i$ 及 $b^j+\varepsilon c^j$。在剩下來的座標中指定給第一個座標的符號分別爲：$(2\delta-1)(-1)^{i-1}(2\varepsilon-1)(-1)^j$ 以及 $(2\varepsilon-1)(-1)^{j-1}(2\delta-1)(-1)^{i-1}$。但是還符號在 $\omega=du^1\cdots\cdots du^p$ 時就決定了這（$p-2$）面上的符號 $\omega_{i\delta(j-1)\varepsilon}$ 及 $\omega_{j\varepsilon i\delta}$。既然他們正相差一個負號，可見他們彼此符號相反。□

假設 α 與 β 爲 M 上的兩個 p 方塊。設 U 及 V 分別爲他們的定義域。假設在包含這些定義域的開集合之間存在一個可微同胚映射把 U 的每一個 k 面（$k=0,1,\cdots\cdots,p$）映射到 V 的一個 k 面之上，而且使下圖可交換：



此即使得 $\beta\circ\varphi=\alpha$，則說 α 與 β 這兩個 p 方塊互相等價。顯然兩個互相等價的 p 方塊會在 M 中具有相同的像域。給定一個 p 方塊 β，我們若取 φ 爲 R^p 中的一個平移，或者以非零常數乘各座標，或者對座標加以重新排列，或者上面這些的組合，而取 $\alpha=\beta\circ\varphi$，則 α 與 β 互相等價。

假設透過 φ 兩個 p 方塊互相等價而 ω 是 α 的一個符號，則既然 φ 是 R^p 上的一個座標映射，因此其符號或與 $(u^1,\cdots\cdots,u^p)$ 相合或與 $(-u^1,u^2,\cdots\cdots,u^p)$ 相合。在前者我們就定義 (α,ω) 與 (β,ω) 相等價，而在後者我們定義 (α,ω) 與 $(\beta,-\omega)$ 相等價。能證明這樣的定義確實給出等價關係。

定理 4.6.2 假設 (α,ω) 與 $(\beta,\delta\omega)$, $\delta=\pm1$ 互相等價，則 (α,ω) 之具號的 $(p-1)$ 面按秩序會與 $(\beta,\delta\omega)$ 之具號的 $(p-1)$ 面互相等價。

假設 C_i 是一些具號的 p 方塊而 r_i 是些實數，則一個有限項的形式和 $\sum r_iC_i$ 就稱爲一個 p 鏈。一個 p 鏈 $\sum r_iC_i$ 等價於另個 p 鏈 $\sum s_jD_j$ 的定義是：就每一個具號的 p 方塊 (α,ω) 而言，我們都有：

$$\begin{aligned}&\sum\{r_i\mid C_i\text{ 等價於 }(\alpha,\omega)\}\\-&\sum\{r_i\mid C_i\text{ 等價於 }(\alpha,-\omega)\}\\=&\sum\{s_j\mid D_j\text{ 等價於 }(\alpha,\omega)\}\\-&\sum\{s_j\mid D_j\text{ 等價於 }(\alpha,-\omega)\}.\end{aligned}$$

另外我們又說一個 p 鏈 $\sum t_iE_i$ 是不可化簡的（irreducibie），如果就其中任何兩項 E_i 與 E_j 來考慮，E_i 總不會跟 E_j 或 $-E_j$ 等價。因此任何 p 鏈都可以適當加以化簡而讓其等價於某個不可化簡的 p 鏈，對於任意

p，我們容許考慮空和，就是連一項也沒有的情形，而稱之爲零 p 鏈或零鏈，以 0 記之。容易在兩個鏈之間引入加法以及實係數乘法的運算。這些運算與等價關係是彼此相諧的（compatible）。

如果 $p=0$，我們就把零方塊的符號跟係數合在一塊而直接把零鏈寫成一些點乘以一些係數的和：$\sum r_i m_i$。對於每個 p 我們容易驗證所有的 p 鏈合在一起構成一個實係數的向量空間。

假設方塊 α 的定義域爲 U，以 U^0 代表 U 之內點的集合。如果 α_* 在 $x \in U^0$ 爲非奇異，那麼就定義 x 是 α 的一個正則點。現在以 U^r 來代表 α 的所有正則點的集合。

p 鏈的意義可以從將其表爲 p 維具號子流形 N 中的某一區域來看出。這兒只來考慮不可化簡的 p 鏈，而且其係數皆爲 $t_i=1$。假設 (α, ω) 是個具號的 p 方塊，而 S 是子流形 N 中屬於 α 的像域 $S=\alpha U$。假設 α 在 U^r 上爲嵌射，而且如果 α_* 在 x 點爲非奇異，則若 $v_1, \cdots\cdots, v_p$ 爲 R^p_x 中一組與 ω 同符號的基，則 $\alpha_* v_1, \ldots, \alpha_* v_p$ 就是 $N_{\alpha x}$ 中一組與 N 之符號相同的基。當所有這些條件都滿足，我們就說 p 方塊給出 S 的一種參數化。如果某個 p 方塊給出 S 的參數化，則任何等價的方塊照樣給出 S 的參數化。

現在我們說一個不可化簡的 p 鏈 (α_i, ω_i) 給出 N 中某區域 S 的一種參數化，如果下列條件滿足：

(a) 每個 (α_i, ω_i) 給予 N 中某區域 S_i 的參數化。

(b) S 爲所有這些 S_i 的聯集。

(c) 對於每組 $i \neq j$，必定 $\alpha_i U^r_i$ 與 $\alpha_j U^r_j$ 沒有任何交點，這兒 U_i 就是 α_i 的定義域。

注意在這兒的定義中我們並沒有要求這些 p 方塊在他們的 $(p-1)$ 面之間要滿足什麼互相能匹配的條件。當以後考慮具有邊界的流形（參考定理 4.6.6），我們會適當的加入一些合理的在邊界互相匹配的正則性條件。但是在目前我們暫時不管。

如果跟一個可化簡 p 鏈相等價的不可化簡 p 鏈能夠對 S 給予一種參數化，則也說這個可化簡的 p 鏈也對 S 給予參數化。當然任意其他不可化簡的 p 鏈都照樣給 S 一種參數化。

實例 (a) 常數映射 $\alpha: U \to M$ 總是一個 p 方塊。這時由於對任何 $p>0$ 都有 $\alpha(u^1, \ldots, u^p) = \alpha(-u^1, \ldots, u^p)$，因此（$\alpha$，$\omega$）總是與其負號方塊（$\alpha$，$-\omega$）相等。

(b) 三角形，**金字塔形**（tetrahedran）以及高維的 ***p* 單體**（p-simplex）都可以使用 p 方塊來加以參數化。例如，以（0，⋯⋯，0）及單位點 $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$ 爲頂點的 p 單體可以看如下面所定義的這個 R^p 中的 p 方塊 α 的像域。取 U: $0 \leq u^i \leq 1$ 而

$$\alpha(u^1, \ldots, u^p) = (u^1, u^2[1 - u^1], u^3[1 - u^1][1 - u^2], \ldots, u^p[1 - u^1][1 - u^2]\cdots[1 - u^{p-1}]).$$

所有 α 之定義域中的內點皆爲正則點。由於同樣這定義式可以延拓並適用於包含 U 的開集合之上（事實上可以定義於整個 R^p），因此顯然 α 是平滑的方塊。

由這個實例，再加上我們也知道任何 p 方塊都可以被分解成一些 p 單體，我們可以看出把我們的積分理論建立於 p 方塊上跟建立於 p 單體上其實並沒有什麼基本上的差別。

(c) 考慮極座標映射 $\alpha(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$。這個映射就使用一個定義於 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 之上的 2 方塊來給出封閉單位圓盤的一個

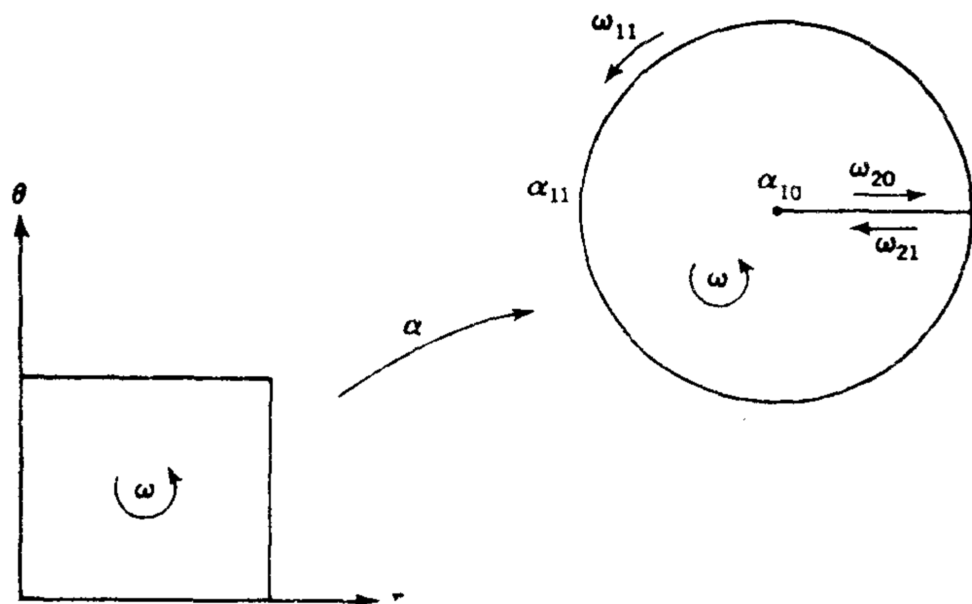


圖 16

參數化，如圖16所示。這時所有的內點皆爲正則點，而四個面分別給爲：

$\alpha_{10}\theta=(0\cos\theta,0\sin\theta)=(0,0)$，因此 α_{10} 是個常數1方塊。

$\alpha_{11}\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$，因此 α_{11} 給出單位圓的參數化。

$\alpha_{20}r=\alpha_{21}r=(r,0)$，因此 α_{20} 與 α_{21} 彼此等價，他們都給出 x 軸上單位線段的參數化。可是應注意的是不管使用 α 的那一個符號 ω，所得到的具號面 $(\alpha_{20},\omega_{20})$ 及 $(\alpha_{21},\omega_{21})$ 彼此的符號正好相反。

(d) 接下來我們把實例(c)推廣成 R^p 中以單位球面 S^{p-1} 爲其邊界之單位球如何透過一個 p 方塊來加以參數化。取：

$$\alpha(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})=(r\cos\theta_1,r\sin\theta_1\cos\theta_2,r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\ldots,$$
$$r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{p-2}\cos\theta_{p-1},r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{p-1}),$$

其中 $0\le r\le 1,0\le\theta_i\le\pi$ 若 $i=1,\ldots,p-2$，而 $0\le\theta_{p-1}\le 2\pi$。這時的 α_{11} 面上 r 總等於1，而成爲 R^p 中（$p-1$）維子流形 S^{p-1} 的一種參數化。至於 α_{10} 面之上 $r=0$，所以根本整個面只爲一點而爲常數。就 $2\le i\le(p-1)$ 時面 $\alpha_{i\varepsilon}$ 就 $\theta_i,\cdots\cdots,\theta_{p-1}$ 而言是個常數，因此如果給予一個符號，則他們與其負號者相等價。最後在面 α_{p0} 與 α_{p1} 之上 θ_{p-1} 分別等於0與 2π，因此他們爲同一個面。可是對於 α 的任一符號 ω 來講，ω_{p0} 與 ω_{p1} 正好符號相反。

習題 4.6.1 就金字塔形之參數化來講，在實例(b)於 p 爲3時，試證明每一個2面或者爲一個三角形的參數化或者當給予符號時會與其負號者等價。此外，這金字塔形的每一個三角形面都僅由 α 的單獨一個2面來加以參數化。

一個具號的 p 方塊（α,ω）之邊界就是由所有其具號的（$p-1$）面取和所得的（$p-1$）鏈：$\sum_{i=1,\ldots,p,\varepsilon=0,1}(\alpha_{i\varepsilon},\omega_{i\varepsilon})$，而以 $\partial(\alpha,\omega)$ 記之。至於一個 p 鏈之邊界則定義爲各組成 p 方塊之邊界以原係數所組成的（$p-1$）鏈：$\partial\sum r_iC_i=\sum r_i\,\partial C_i$。因此我們可以將邊界 ∂ 的作用看成爲從 p 鏈的向量空間到（$p-1$）鏈的向量空間的一個線性運算，就稱爲邊界運算（boundary operator）。這運算是與等價關係相諧的，此即：如果 p 鏈 C

與 p 鏈 D 等價，則必定 ∂C 也會跟 ∂D 等價。

定理 4.6.3 對於任何一個 $p>1$ 的 p 鏈 C 而言，我們都有：$\partial\partial C=0$。

證明 如果單只考慮一個具號的 p 方塊 (α,ω)，則由定理 4.6.1 立即可得 $\partial\partial(\alpha,\omega)=0$，因爲這些 $(p-2)$ 面彼此成對的互相抵消。因此我們對於隨使一個 p 鏈就有：

$$\partial\partial C=\partial\partial\sum r_i C_i=\partial\sum r_i\,\partial C_i=\sum r_i\,\partial\partial C_i=0.\ \square$$

如果 (α,ω) 是個 1 方塊，則其邊界由終點減去起點所組成。因此 $\partial(\alpha,\omega)$ 之係數和爲零。一般情形假設 $C=\Sigma r_i m_i$ 是個 0 鏈，則定義其指數 $IC=I(\sum r_i m_i)=\sum r_i$ 爲全部的係數和。因此對於任何 1 鏈 D 來講，總有 $I\,\partial D=0$ 這性質之逆不見得成立。我們需要加入適當的拓樸條件才能保證其逆爲眞。這就給我們看出方體鏈之代數與拓樸之間所具有的一些關係了。而有：

定理 4.6.4 流形 M 爲連通的充要條件是 M 上的每一個零鏈 C 若滿足 $IC=0$，則必定存在一個 1 鏈 D 滿足 $\partial D=C$。

證明 假設 M 是連通的，而且 C 是個 0 鏈其指數爲零，$IC=0$。則有 $C=\Sigma r_i m_i$，其中 $\Sigma r_i=0$。在 M 中選取一點 m_0。對於鏈中的每點 m_i，我們都可以選出一條 C^∞ 曲線 α_i 連接 m_0 與 m_i，因爲 M 是連通的。我們不妨假設 α_i 是從 0 到 1 取其參數，因此 α_i 是個定義於 $[0,1]$ 之上的 1 方塊。考慮 1 鏈：$D=\sum r_i(\alpha_i,du)$，則其邊界爲：

$$\begin{aligned}\partial D&=\sum r_i\,\partial(\alpha_i,du)=\sum r_i(\alpha_i(1)-\alpha_i(0))\\&=\sum r_i m_i-\left(\sum r_i\right)m_0=\sum r_i m_i=C.\end{aligned}$$

反過來，假設 M 並非連通，則對於 M 的每一個連通的成分 M_r 我們都

可以定義一個偏指數 I_τ 如下：對於任意 0 鏈 $\Sigma r_i m_i$ ，考慮所有落在這成分 M_τ 中之點 m_i 而定義 $I_\tau(\Sigma r_i m_i)$ 爲這些 m_i 之係數的和。由於一個 1 方塊或許全部落在 M_τ 之中，或許全部落在 M_τ 之外，我們對於每個 1 鏈 D 仍然會有 $I_\tau \partial D = 0$ 。現在如果設 M_0 與 M_1 爲 M 中兩個不相同的連通成分，而取 $m_0 \in M_0$ 及 $m_1 \in M_1$ 。則 $C = m_1 - m_0$ 是個 0 鏈滿足 $IC = 0$ 。但是 $I_1(m_1 - m_0) = 1$ ，可見 $m_1 - m_0$ 不可能成爲某 1 鏈的邊界。□

有相當廣泛的一些領域都可以由方體鏈來加以參數化。我們這兒預備給出幾個這方面的定理，但是卻不加以證明，因爲這兒所需涉及的拓樸技巧超越本書的範圍。

定理 4.6.5 假設 M 是個 d 維緊緻而又具號的流形。則在 M 中存在一個 d 鏈 C ，一方面能使整個 M 參數化，另方面其 ∂C 又能等價於 0 。

因此緊緻具號的流形都是可參數化的流形。另外還有一類可以參數化的流形就是緊緻的擁有邊界的具號流形。假設 M 爲流形，$N^- = N \cup B$ 爲其中的子集滿足如下條件：

(a) N 是 M 中某一 p 維子流形 $N+$ 當中的開子流形。

(b) B 是 $N+$ 中的一個 $(p-1)$ 維的子流形。

(c) 對於 $N+$ 中的拓樸而言，B 是 N 的邊界。

(d) 在每一點 $b \in B$ ，存在 b 於 $N+$ 中的座標鄰域 U ，使得其上的局部座標 $x^i, i = 1, \ldots, p$ 滿足：

$$B \cap U = \{n \mid x^1 n = 0\} \text{ 以及 } N \cap U = \{n \mid x^1 n < 0\}.$$

如果所有這些條件都滿足，則說 $N^- = N \cup B$ 是個以 B 爲邊界的 p 維子流形。

如果 N 具有符號，則 B 也就有一個相應的符號。此即如果如(d)項所述的座標系統與 N 的符號相合，則把 $x^2, \cdots\cdots, x^p$ 局限於 B 所得到 B 上的座標系統就應與 B 的符號相合。

定理 4.6.6 假設 N^- 是個緊緻的具號流形而且以 B 爲其邊界，則存在一

個 p 鏈 C 能夠將 N^- 全體加以參數化。同時使得 ∂C 正好給予 B 一種參數化。注意這兒 B 的符號是取爲與 N 所對應的符號，如上所述。

我們可以把定理4.6.5看爲定理4.6.6於 B 爲空集合時的特別情形。他們的證明都要涉及S.Cairns的流形三角化定理(triangulation)。這時定理主要所表達的只不過是提到 N^- 一定可以被分解成一些與單體可微同胚的許多部分，同時這些部分之間又可以很適切地互相銜接黏補起來。最後再使用實例(b)中所考慮的映射就可以得出 N^- 的參數化方體鏈了。

接下來繼續討論體積元素。假設 M 是個 d 維的具號流形，則所謂 M 上的一個體積元素就是一個定義於整個 M 上的 d 微分形 Ω，它在每點都不等於零，而且跟 M 的符號相合，此即：對於 M 上的每個座標系統 x^i，如果這座標系統與 M 的符號相合，則必定 Ω 可表爲如下的座標形式：

$$\Omega = f\,dx^1\cdots dx^d$$

其中 f 是個正值的平滑函數。因此任取定義於整個 M 上的正值函數 g，若 Ω 爲體積元素，則必定 $g\Omega$ 也是個體積元素。反過來任取 M 上的兩個體積元素，則必定存在一個正值平滑函數 g，使得其一爲另一的 g 倍。此外任意的 d 微分形當然都是 Ω 的某個平滑函數倍。

我們可以使用單元分割(partition of unity)的技巧，藉著將各個座標體積元素 $dx^1\cdots\cdots dx^d$ 平滑地黏補在一起而得出一個大域定義的體積元素以註明在任何具號的流形上總存在有體積元素。另方面假設 M 上具有黎曼測距，則這測距就在 d 形間定義了內積運算，可是在一點的 d 形組成的向量空間只爲一維，因此只可能有兩個 d 形是具有單位長。其中只有一個與 M 的符號相合。選取這個單元 d 形所組成的向量場，就可將此 d 形稱爲黎曼體積元素。假設 $\theta_1,\cdots\cdots,\theta_d$ 這組單形是一組正交單元基，則 Ω 之局部表示可以寫成：$\Omega = \theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_d$。例如在 E^3 上其黎曼體積元素爲 $dxdydz$。

假設 Ω 是 M 上的體積元素，而 (α,ω) 這個 d 方塊給出 M 中某領域的參數化，則由於在正則點 α 所給出的方向應該與 M 之符號相合，可知我們有 $\alpha^*\Omega = f\omega$。其中 $f\geq 0$，而且在正則點 $f>0$。

實例 (e) 取$M = R^3$，而令N^-代表封閉的圓柱面：

$$N^- = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

這時N^-是一個二維的子流形，其邊界由兩個圓圈所組成。我們可以考慮整個無窮延伸的圓柱面 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 來做爲$N+$考慮，而N^-可以藉著如下定義的單獨一個2方塊來參數化：

$$\alpha(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \qquad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

(f) 在實例(d)中α的像域，就是R^p中封閉的圓球N^-而爲一個p維的子流形，其邊界爲S^{p-1}。我們可以取$N+$就等於整個R^p。假設ω是R^p的一個符號，則(α，ω)是N^-的一種參數化使得∂(α，ω)也給出邊界S^{p-1}的參數化，因爲他們的符號相合。爲證明這事，如果在α之像域中所取的符號ω可表爲$\omega = du^1 \cdots\cdots du^p$，則這符號也同樣可表爲$\omega' = dr\, d\theta_1 \cdots d\theta_{p-1}$，這就充分的運用$\alpha$的定義域而立即看出在邊界上所給的符號相合。($p-1$)鏈$\partial$($\alpha$，$\omega$)是可化簡的，因爲$(\alpha_{10}, \omega_{10})$以及$(\alpha_{i\varepsilon}, \omega_{i\varepsilon})$, $i = 2, \ldots, p-1$都對一個或多個變數而言爲常數。因此會與其負號方塊相等價，因此應該等於零。另外$(\alpha_{p0}, \omega_{p0})$與$(\alpha_{p1}, \omega_{p1})$彼此相等但是符號相反。可見$\partial$($\alpha$，$\omega$)等價於一個單單由($p-1$)方塊($\alpha_{11}$，$\omega_{11}$)所組成的不可化簡鏈。當然這個($p-1$)方塊就給出$S^{p-1}$的參數化了。這時$\partial$($\alpha_{11}$，$\omega_{11}$)等價於$\partial\partial$($\alpha$，$\omega$)$=0$，因此($\alpha_{11}$，$\omega_{11}$)正是定理4.6.5中所提及的那種類型的在$S^{p-1}$之上的參數化。

這兒我們十分簡單的敍述一下存在於p鏈所構成的代數與第3.10節與第4.5節所討論的Betti數之間的一些關係。如果一個p鏈Z滿足∂Z等價於零，則說Z是個p輪(p-cycle)。如果對於p鏈B存在一個($p+1$)鏈C使得B與∂C等價，則說B是個p緣。M上第p個(實係數的)Betti數就是整數B_p使得存在B_p個p輪Z_1，……，Z_{B_p}能夠滿足如下條件：

(a) 唯一的線性組合$\sum r_i Z_i$能夠成爲p緣的就是當所有的係數皆爲零，$r_i = 0$的情形。

(c) 對於每一個 p 輪 Z ，存在一個適當的線性組合 $\sum r_i Z_i$ 使得 $Z-\sum r_i Z_i$ 正好是一個 p 線。注意如果 M 不是緊緻的話，有可能沒辦法存在有限個 Z_i 滿足條件(b)，這時就說 $B_p=\infty$ 。

當我們對定理4.6.4之證明仔細加以分析不難看出 B_0 其實正好代表 M 的連通成分的個數。此外如果 M 爲單連通，那麼 $B_1=0$ 。可是反過來若 $B_1=0$ M 並不見得爲單連通。另外設 M 之維數爲 d ，則對於 $p>d$ ，我們都應有 $B_p=0$ 。如果 M 爲緊緻又是可具號的，那麼Betti 數具有很好的對稱性，此即所謂Poincaré 對偶性：$B_p=B_{d-p}$ 。

4.7 歐氏空間上的積分

本節所討論的材料，至少對於二維或三維的情形，都可以在高等微積分的任何一本教材裏找得到。

對於一個線性的 p 方塊：

$$U=\{(u^1,\ldots,u^p)\mid a^i\le u^i\le b^i\}$$

其（標準的）測度爲 $\mu_p U=(b^1-a^1)(b^2-a^2)\cdots(b^p-a^p)$ 。因此我們可以把函數 μ_p 看成對 R^p 中的這些方體形的子集合指定一個實數。一個定義於 U 上實值函數 f 的**黎曼積分**（Riemann integral）（如果存在的話），就是取爲極限值：

$$\int_U f\,d\mu_p=\lim_{U_j\to 0}\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\mu_p U_j,$$

其中 U 被分解成隨便 N 個較小的 p 方塊 U_j ，然後我們在每個 U_j 中任選一點 x_j 。如果 f 是個連續函數，能證明這積分一定存在。

從應用的觀點來看，這個定義給得十分自然，因爲這定義就推廣了 f 爲常數之時的情形。例如，當某物質的密度（density）爲常數，則質量可由體積與密度相乘而得。可是如果密度函數 f 並非常數，而只爲一個連續函數，則很自然的我們可以把 $f(x_j)\mu_3 U_j$ 這些乘積之和看如整個質量的概數。因爲這兒 U_j 是一些很小的方塊，因此我們不妨把 f 看成在 U_j 上其值爲常數 $f(x_j)$, $x_j\in U_j$ 。可見黎曼積分 $\int_U f\,d\mu_3$ 就給出 U 中質量的很

合理的定義。大部分有關積分的物理應用都是從定義一個這樣的極限數量來開始的。

可是通常這些和的極限值並不見得容易求，因此常常實際的做法就是將這黎曼積分連繫到一些完全不同的東西：就是求單變數之積分，然後重複之而得多重積分。由於這種多重積分法非常的普遍，因此對於多變函數而言有時根本就直接以其多重積分來當做其黎曼積分的定義。所以這些事可行，因爲我們有下面基本的Fubini 定理：

Fubini 定理　假設 f 是 U 上的連續函數，則定積分

$$f_p(u^1, \ldots, u^{p-1}) = \int_{a^p}^{b^p} f(u^1, \ldots, u^{p-1}, u^p)\, du^p$$

是參數 $u^1, \cdots\cdots, u^{p-1}$ 的連續函數。而 f 的黎曼積分可以給爲：

$$\int_U f\, d\mu_p = \int_{U_{p-1}} f_p\, d\mu_{p-1},$$

其中的 U_{p-1} 是個（$p-1$）方塊：$U_{p-1} = \{(u^1, \ldots, u^{p-1}) \mid a^i \leq u^i \leq b^i, i = 1, \ldots, p-1\}$。當我們重複這過程可得：

$$\int_U f\, d\mu_p = \int_{a^1}^{b^1} \left(\cdots \int_{a^{p-1}}^{b^{p-1}} \left(\int_{a^p}^{b^p} f(u^1, \ldots, u^p)\, du^p \right) du^{p-1} \cdots \right) du^1.$$

我們另外也可以任意顚倒積分的秩序，而得出相同的結果來。

在上面定義中只提到線性方體塊 U 上的函數之積分，如果 f 的定義域是隨便的一個有界的集合 D，那麼我們可以先將 D 包含於一個較大的線性方體 U 之中，然後取：

$$\int_D f\, d\mu_p = \int_U \Phi_D f\, d\mu_p,$$

這兒 Φ_D 是 D 的特徵函數（characteristic function），此即定義爲：

$$\Phi_D x = \begin{cases} 1 & 若\ x \in D, \\ 0 & 若\ x \notin D. \end{cases}$$

這個定義對於實際計算並不方便，比較方便的做法是求得一個從某個線性方體U到D的一對一可微分映射，然後運用下面有關黎曼積分的：

變數變換定理　假設E及D皆爲R^p中的領域，又假設$\varphi : E \to D$是個一對一的 C^1 映射，而 $I = \int_D f d\mu_p$ 存在。則必定積分 $\int_E (f \circ \varphi) | J_\varphi | d\mu_p$ 也照樣存在而且正好等於I，其中 J_φ 代表φ的賈氏行列式。如果φ之方程式爲 $u^i = F^i(v^1, \ldots, v^p), i = 1, \ldots, p$，其中 u^i 代表D上的卡氏座標而 v^i 代表E上的卡氏座標，則

$$J_\varphi(v^1, \ldots, v^p) = \det\,(\partial_j F^i(v^1, \ldots, v^p)),\ \partial_j = \partial/\partial v^j.$$

注意如果在φ_*不爲奇異之點φ皆能保持符號不變，則有：$J_\varphi \geq 0$，因此可以在上面積分式中不用取絕對值。另外也注意在 φ_* 的奇異點之處 $J_\varphi = 0$，因此我們可以單只注意φ的正則點集，就是 φ_* 在其上爲非奇異的地方，而要求φ在其正則點集上爲一對一。

現在我們就 $p = 2$ 的情形來示範這個變數變換定理。假設：

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 其中就每個\ x, h(x) \leq y \leq k(x)\},$$

這兒h與k都是C^1函數，而對所有$a \leq x \leq b$都滿足$h(x) \leq k(x)$。接著我們可以取長方形 $E = \{(u, v) \mid a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 1\}$，然後考慮如下定義的映射$\varphi : E \to D$: $x = u,\ y = v \cdot k(u) + (1 - v)h(u)$，如圖 17 所示。這時 $J_\varphi = 1 \cdot (k(u) - h(u)) - 0 \cdot (\cdots) = k(u) - h(u) \geq 0$，因此使用變數變換定理然後再用Fubini 定理可得：

$$\begin{aligned}\int_D f(x, y)\, d\mu_2 &= \int_E f(u, vk(u) + (1 - v)h(u))(k(u) - h(u))\, d\mu_2 \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 f(u, vk(u) + (1 - v)h(u))(k(u) - h(u))\, dv \right) du.\end{aligned}$$

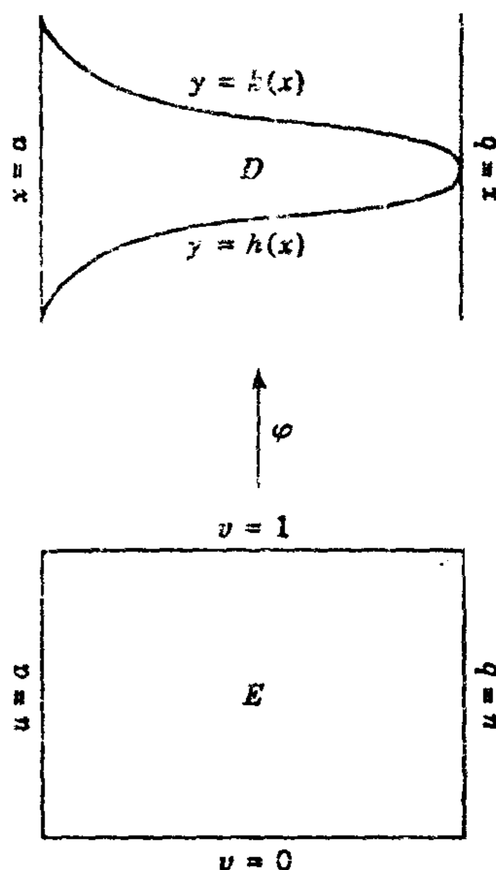


圖 17

在上式中對於每個 u 值我們都可進行變數變換 $y = vk(u) + (1 - v)h(u)$ ，而得 $dy = (k(u) - h(u))\,dv$ ，同時當 $v = 0$ 時 $y = h(u)$ ，而當 $v = 1$ 時 $y = k(u)$ ，因此裏面的那個積分變成為 $\int_{h(u)}^{k(u)} f(u, y)\,dy$ 。然後只需以 x 取代 u ，則可得在 D 上的 Fubini 定理為：

$$\int_D f(x, y)\,d\mu_2 = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x, y)\,dy\right) dx.$$

4.8 微分形之積分

當我們轉而考慮微分形之積分時，我們就必須把符號的問題考慮進來。在實際的運用中這事出現得十分自然。例如，在一個重力場的影響之下我們穿行一條曲線的路徑所作的功（work）就會跟這曲線所進行的方向有關。如果沿著相反的方向走完同一條路徑，則所做的功正好相差一個符號

。從物理的觀點在曲線上積分我們仍應將其定義給爲某一和之極限才顯得最爲自然，可是這時要處理這樣的和以及其極限卻變得非常困難。因此這兒我們就不再去惹這些麻煩，而直接以黎曼積分來表達此定義，並以變數變換定理及 Fubini 定理來求其值。

考慮一個具號的 p 方塊（α，ω），其中 $\alpha: U \to M$ 而 M 爲一個流形。考慮 θ 是個 p 形，其定義域包含 $\alpha(U)$。這時可以使用映射 α 來把 θ 拉回到 U 之上而得出定義於 U 的 p 形 $\alpha^*\theta$。記得在第 3.9 節中我們已經學過了如何求得 $\alpha^*\theta$ 的座標表示。其做法非常簡單，只需在原來 θ 的座標表達式中把 α 的座標方程式代入計算即可。由於所考慮的符號 ω 可以表爲 p 形 $\pm du^1 \cdots\cdots du^p$，因此 ω 是 R^p 上所有 p 形的一組基。而知 $\alpha^*\theta = f\omega$，其中 f 是 U 上的某個實值平滑函數。按上面用法，假設我們在 R^p 的 p 形間定義一個內積運算 $<\ ,\ >_p$ 而要求 ω 具有單位長 $<\omega, \omega>_p = 1$，則得 $f = <\alpha^*\theta, \omega>_p$。因此我們定義 θ 在方塊（α，ω）之上的積分爲：

$$\int_{(\alpha,\,\omega)} \theta = \int_U \langle \alpha^*\theta, \omega\rangle_p \, d\mu_p.$$

在特別的情形，我們定義 0 形 θ 在 0 方塊 $m \in M$ 上的積分爲 θ 在 m 之值 θ_m。至於 p 形 θ 在一個 p 鏈 $\Sigma r_i C_i$ 之上的積分顯然可以直接定義成 θ 在每個方塊上之積分的和：

$$\int_{\Sigma r_i C_i} \theta = \sum r_i \int_{C_i} \theta.$$

實例 (a) 我們可以把具有反時鐘方向的單位圓

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

藉著 1 方塊（α，du）來參數化，其中 α 定義於 $[0, 2\pi]$ 之上，而給爲 $\alpha(u) = (\cos u, \sin u)$。因此 α 的座標方程式爲 $x = \cos u$, $y = \sin u$。如果考慮單形 $\theta = (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2)$，則：

$$\alpha^*\theta = [\cos u\, d(\sin u) - \sin u\, d(\cos u)]/[\cos^2 u + \sin^2 u]$$
$$= \cos^2 u\, du + \sin^2 u\, du = du.$$

但是$\langle du , du \rangle_1 = 1$，所以

$$\int_{(\alpha, du)} \theta = \int_{[0,2\pi]} 1\, d\mu_1 = \int_0^{2\pi} du = 2\pi.$$

(b) 在第4.6節我們已經看到 S^2 可以藉著一個定義於 $U = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 之上的2方塊 α 來加以參數化，其中 α 的方程式爲：

$$(x, y, z) = (\cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$$
$$= \alpha(u, v).$$

事實上在那兒實例(d)中的寫法是：$p = 3$，$\alpha_{11} = \alpha,\ \theta_1 = u,\ \theta_2 = v,\ r = 1$。我們定義 S^2 上的正符號就是使得在（1，0，0）這點附近當我們把座標 y，z 局限於 S^2 考慮時，其符號正好與 S^2 之正號相合。這種選法跟通常的外指法向量慣用法一致。因爲 x，y，z 給出 R^3 上的正符號，而 ∂_x 就是一個在（1，0，0）這點的鄰域指向 S^2 這圓球之外的法向量。因此具號的二方塊（α，$du\,dv$）就給出具正號的 S^2 的一種參數化。

在第4.5節實例(c)我們另外還考慮了一個定義於 $R^3 - \{0\}$ 之上的2形 $\tau = (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)/r^3$。使用下列資料我們立即能算出 $\alpha^*\tau$：

$$\begin{aligned}
\alpha^*\, dx &= -\sin u\, du,\\
\alpha^*\, dy &= \cos u \cos v\, du - \sin u \sin v\, dv,\\
\alpha^*\, dz &= \cos u \sin v\, du + \sin u \cos v\, dv,\\
\alpha^* r^3 &= 1,\\
\alpha^*(dx\, dy) &= \alpha^*\, dx \wedge \alpha^*\, dy = \sin^2 u \sin v\, du\, dv,\\
\alpha^*(dy\, dz) &= \cos u \sin u \cos^2 v\, du\, dv - \sin u \cos u \sin^2 v\, dv\, du\\
&= \cos u \sin u\, du\, dv,\\
\alpha^*(dz\, dx) &= \sin^2 u \cos v\, du\, dv,\\
\alpha^*\tau &= [\cos^2 u \sin u + \sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v]\, du\, dv\\
&= \sin u\, du\, dv.
\end{aligned}$$

因此 τ 在正號球面（α，$du\,dv$）之上的面積分立即可算得爲：

$$\int_{(\alpha,\,du\,dv)} \tau = \int_U \sin u \, d\mu_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin u \, dv \, du = 4\pi.$$

(c) 能夠代表圖 18 中所畫的金字塔形之三個面的 2 鏈可寫爲 $C = C_1 + C_2 + C_3$，其中 $C_i = (\alpha_i, du\,dv)$ 是由下列資料所給定：

$$\alpha_1(u,v) = (0, u, (1-u)v),\ \alpha_2(u,v) = ((1-u)v, 0, u),\ \text{及}\ \alpha_3(u,v) = (u, (1-u)v, 0),$$

其中 $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$ 代表他們共同的定義域U。考慮微分形：

$$\theta = dy\,dz + dx\,dy$$

則有：

$$\alpha_1^*\theta = du \wedge d[(1-u)v] = (1-u)\,du\,dv,$$

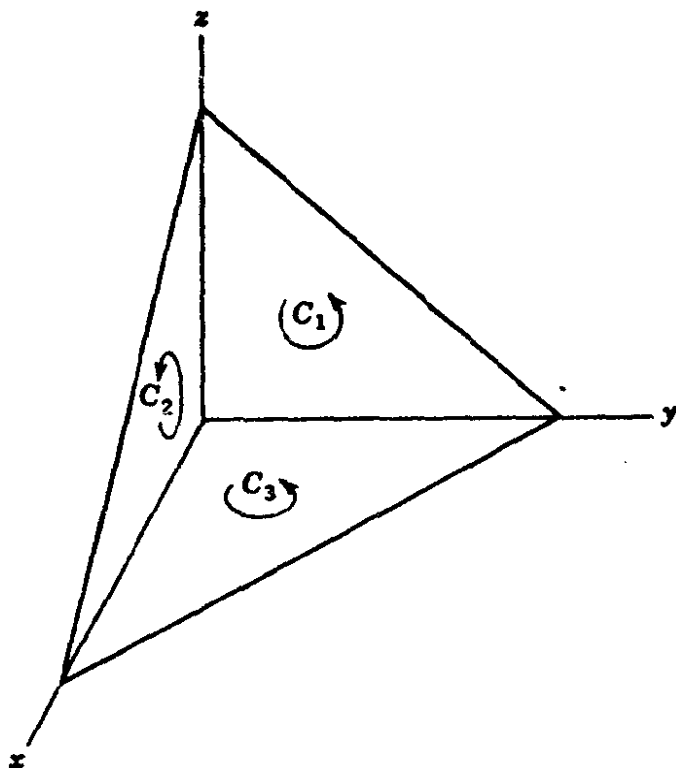


圖 18

$$\alpha_2^*\theta = 0 \qquad \text{(each term has a } d0 = 0\text{)},$$
$$\alpha_3^*\theta = du \wedge d[(1-u)v] = (1-u)\,du\,dv.$$

因此可得：

$$\int_C \theta = \int_U (1-u)\,d\mu_2 + \int_U 0\,d\mu_2 + \int_U (1-u)\,d\mu_2$$
$$= 2\int_0^1 \int_0^1 (1-u)\,du\,dv = 1.$$

在向量分析中處理E^2及E^3上具號的積分時所使用的向量寫法。其實可以不太困難就翻譯成微分形的寫法。就線積分（line integral）而言，通常向量的寫法是：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds,$$

其中$\mathbf{F}$是一個向量場，$\mathbf{r}$是位移向量（displacement vector），而$\mathbf{T}$是沿著曲線C的單位切向量場。又s為C的弧長。如果使用微分形的寫法，則取 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F^1dx + F^2\,dy + F^3\,dz$，其中$F^1$，$F^2$及$F^3$構成$\mathbf{F}$的三個成分，$dx$，$dy$，$dz$ 則代表$d\mathbf{r}$的三個成分。因此這種寫法也是十分常見的。

如果特別考慮平面上的線積分，我們還會遭遇到下列的情況。這時的線積分能代表某一向量場穿過一條曲線的流量（flux）。假設穿過曲線C的正號上的單位法向量場為N，則這流量可表為 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds$。在平面$E^2$中的Hodge算子等於將一個向量旋轉90度，因此 $*\mathbf{N}=\mathbf{T}$。而另方面 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = *\mathbf{F}\cdot *\mathbf{N}$，因此可得 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_C *\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$

如果考慮 E^3 中的面積分，使用向量分析的語言可寫為：$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$，其中$N$是具號的單位法向量場，而 $d\sigma$ 是面積元素（area element）。假設E_1，E_2 是S的切空間中的一組正交單元基，其符號與S的符號相合，則在Hodge算子之下$*\mathbf{N}$正好等於$\mathbf{E}_1\wedge\mathbf{E}_2$。同時也對$\mathbf{F}$加以Hodge算子而得出$S$上的積分

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \int_S F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy,$$

其中由於 $\partial_i \cdot \partial_j = \delta_{ij}$ ，所以 F_j 可表為 $F^i \delta_{ij} = F_j$ 。因此我們所使用來積分的微分形是由 $*F$ 得來，而這 $*F$ 是藉著測距來將指標降下來的。

當我們考慮體積分的時候，由於總是選取正號 $dx\,dy\,dz$ ，因此這時的符號通常就不再提了。這時通常的寫法跟我們的寫法幾乎沒什麼差別：

$$\iiint_V f\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f\,dV = \int_V f\,d\mu_3.$$

注意這時 $*f = f\,dx\,dy\,dz$ 。因此Hodge 算子在這兒仍很有用。特別這時我們知道Hodge 算子與外微分運算結合時就給出散度 div 的運算。

為了確保我們所定義的積分具有幾何的意義，我們必須對於此定義與參數化的無關性建立下列兩項結果：第一，一個 p 形 θ 在互相等價的 p 方塊之上的積分必須相同。第二，θ 在具號的子集合之參數化 p 鏈上的積分必須跟這個參數化的選擇無關。有了第一項結果，我們就可以在這積分理論中不去區辨相互等價的 p 鏈。有了第二項結果，我們定義在具號子集合上的積分才算有意義。特別我們可以考慮具有邊界的具號子流形之上的積分。

定理 4.8.1 假設 (α, ω) 與 $(\beta, \delta\omega)$，$\delta = \pm 1$ 為互相等價的 p 方塊，則對於任意一個定義於 α 及 β 之像域上的 p 形 θ 都有：

$$\int_{(\alpha,\omega)} \theta = \int_{(\beta,\delta\omega)} \theta.$$

證明　由於 (α, ω) 及 $(\beta, \delta\omega)$ 等價，存在一個可微同胚映射 $\varphi: U \to V$ 滿足 $\beta \circ \varphi = \alpha$ ，其中 $\alpha: U \to M$ ，$\beta: V \to M$ 。由連鎖法則 $\beta_* \circ \varphi_* = \alpha_*$ （參看習題 1.8.2 ）以及 φ^* 的定義（參看定理 3.9.4）立即可得 $\varphi^* \circ \beta^* = \alpha^*$ 。因此若令 $\alpha^*\theta = f\omega$ 及 $\beta^*\theta = g\delta\omega$ ，則有：

$$f\omega = \varphi^*(\beta^*\theta) = \varphi^*(g\delta\omega) = (g \circ \varphi)\varphi^*(\delta\omega).$$

可是 φ 必須把 V 上與 $\delta\omega$ 之符號相合的座標映射成 U 上與 ω 之符號相合的座標，因此 φ 之賈氏行列式的符號必須與 δ 相同。若令 φ 之方程式為：

$$v^i = F^i(u^1, \ldots, u^p), i = 1, \ldots, p,$$

其中 u^i 及 v^i 分別代表U與V上的卡氏座標系統，則若設 $\delta\omega$ 就是 $dv^1 \cdots dv^p$ ，也設 ω 爲 $du^1 du^2 \cdots\cdots du^p$ ，則有：

$$\begin{aligned} \varphi^*(\delta\omega) &= \delta\varphi^*(dv^1 \cdots dv^p) \\ &= \delta\varphi^* dv^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^* dv^p \\ &= \delta(\partial_{i_1} F^1 du^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\partial_{i_p} F^p du^{i_p}) \\ &= \delta \det(\partial_i F^j) du^1 \cdots du^p \\ &= \delta J_\varphi \omega. \end{aligned}$$

如果在上面是假設 $\omega = -du^1 \cdots\cdots du^p$ ，我們只需在中間過程中都加入負號而知仍得相同的關係式 $\varphi^*(\delta\omega) = \delta J_\varphi \omega$ 。由於 J_φ與 δ 的符號相同，因此得：

$$f\omega = (g \circ \varphi)\varphi^*(\delta\omega) = (g \circ \varphi) \mid J_\varphi \mid \omega,$$

此即已證得：

$$f = (g \circ \varphi) \mid J_\varphi \mid$$

因此由變數變換定理有：

$$\int_{(\beta, \delta\omega)} \theta = \int_V g \, d\mu_p = \int_U (g \circ \varphi) \mid J_\varphi \mid d\mu_p = \int_U f \, d\mu_p = \int_{(\alpha, \omega)} \theta. \qquad \square$$

系 假設C及D是兩個互相等價的 p 鏈，則 $\int_C \theta = \int_D \theta.$

證明 注意關係式 $\int_{(\alpha, -\omega)} \theta = -\int_{(\alpha, \omega)} \theta.$ ，則立即可由上面定理得證。

定理 4.8.2 假設兩個 p 鏈C與D同時給出一個 p 維具號子流形N中某領域S的參數化，而 θ 是個定義於S之上的 p形，則必定：

$$\int_C \theta = \int_D \theta.$$

證明略述 根據上面的系，可以使用與 C 或 D 等價之 p 鏈取代他們，所以不妨假設 C 與 D 都已經是不可化簡的 p 鏈而分別表爲：$C = \sum_{i=1}^{h}(\alpha_i, \omega_i)$ 及 $D = \sum_{j=1}^{k}(\beta_j, \omega_j')$ 。其中 α_i 分別定義於 U_i 又 β_j 分別定義於 V_j 之上。假設 U_i^r 及 V_j^r 分別代表其中的正則點集。我們只需證明在 S 中正則點集的交集上

$$(\bigcup_i \alpha_i U_i^r) \cap (\bigcup_j \beta_j V_j^r) = \bigcup_{i,j} (\alpha_i U_i^r \cap \beta_j V_j^r).$$

積分值相同就可以，因爲在 S 的其餘部分，其測度只能爲零，因此那些不正則的點集對於 S 上的積分沒有什麼貢獻。至於邊界點，我們也可以使用一個其測度爲無窮小的鄰域來加以包含，因此對 S 上的積分都沒貢獻而可加以省略，因此爲證明本定理，只需計算：

$$\begin{aligned}
\int_C \theta &= \sum_i \int_{(\alpha_i, \omega_i)} \theta \\
&= \sum_i \int_{U_i^r} \langle \alpha_i{}^*\theta, \omega_i \rangle_p \, d\mu_p \\
&= \sum_{i,j} \int_{(\alpha_i^{-1}\beta_j V_j^r) \cap U_i^r} \langle \alpha_i{}^*\theta, \omega_i \rangle_p \, d\mu_p \\
&= \sum_{i,j} \int_{V_j^r \cap \beta_j^{-1}\alpha_i U_i^r} \langle \beta_j{}^*\alpha_i^{-1*}\alpha_i{}^*\theta, \omega_j' \rangle_p \, d\mu_p \\
&= \sum_j \int_{V_j^r} \langle \beta_j{}^*\theta, \omega_j' \rangle_p \, d\mu_p \\
&= \int_D \theta.
\end{aligned}$$

其中的第四個等式我們使用變數變換定理，只不過這兒的可微同胚是 $\alpha_i^{-1}\beta_j$ ，因此使用了 $\beta_j^*\alpha_i^{-1*}$ 的賈氏行列式。由於假設 α_i 在 U_i^r 上是一對一，而且 $\alpha_i U_i^r$ 皆彼此不相交，可見 α_i^{-1} 都有定義。另外由 β_j，V_j^r 相同的假設 β_j^{-1} 皆有定義，而且所有的 $\alpha_i U_i^r \cap \beta_j V_j^r$ ， $i = 1$，……，h；$j = 1$，……，k 皆互不相交，因此在上面計算取和時不致於出任何問題。

註：如果一個子集合S可以藉著某一個p鏈來加以參數化，則說S是個可參數化的具號子集合。上面的定理4.8.2就使我們可以在一個具號的可參數化的子集合S上定義一個p形的積分。這時若C是S的一個參數化，只需定義：$\int_S \theta = \int_C \theta$就可。

習題 4.8.1 (a) 假設θ是M上的p形滿足對於M上的每一個p方塊C都有$\int_C \theta = 0$。試證θ恒等於零。提示：選局部座標而在其中的座標p平面上構造小的p方塊。

(b) 假設θ及τ是M上的p形滿足對於任意M上的p方塊C皆有$\int_C \theta = \int_C \tau$。試證$\theta = \tau$。

4.9 Stokes定理

我們可以把微積分的基本定理推廣成恰當的p形在p鏈上之積分的定理。這種推廣定理就統一了幾個重要的定理，其中包含：微積分之基本定理，E^2及E^3中的散度定理，以及面積分之Stokes 定理等等。這種推廣的定理通常就稱爲廣義的Stokes 定理或簡稱爲Stokes 定理。對於這個定理的一種常用的講法就是於使用逆變的反對稱張量場之外，還使用一個黎曼測距，因此由這測距所衍生的Hodge 算子就派上了用場，而於E^2或E^3的情形來把二次或三次的張量場全都消除掉，使得我們只需考慮係數場及向量場就夠。因此這種講法看來非常幾何化。可是在這種講法裏並沒有明白的討論到Hodge 算子，而只將其隱藏於旋度及散度算子的定義之中。事實上我們發現這種講法中所涉及的黎曼結構對於Stokes 定理之證明並不是必要的，而且在高維度空間時這種黎曼結構反而帶來較複雜的公式計算。在眞正講到Stokes 定理之前我們需要引用下列重要的：

定理 4.9.1 假設$\varphi : M \to N$是個平滑映射而θ是N上的p形，則有：$d\varphi^*\theta = \varphi^* d\theta$。因此外微分運算$d$與回拉映射$\varphi^*$互相可交換。

證明 由於d及φ^*這兩個運算都是局部的，因此我們可以運用局部

座標系統。另外這兩個運算均為線性運算，所以只需證明當 θ 為單項的 p 形時此定理成立就夠。因此若 x^1，x^2，……，x^n 為N的一組座標系統，考慮 $\theta = f\,dx^1\cdots dx^p$ 。則 $d\theta = df\wedge dx^1\cdots dx^p$ ，而 $\varphi^*\,d\theta = \varphi^*\,df\wedge\varphi^*\,dx^1\wedge\cdots\wedge\varphi^*\,dx^p$，因為根據定理 3.9.4 φ^* 是一個Grassmann代數同態映射。但是由同樣該定理後面的附註我們知道對於任何N上的係數場 g 都有 $\varphi^*\,dg = d\varphi^*g$，因此

$$\varphi^*\,d\theta = d\varphi^*f\wedge d\varphi^*x^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^*x^p$$

可是另方面我們也有：

$$\begin{aligned}\varphi^*\theta &= \varphi^*f\,\varphi^*dx^1\wedge\cdots\wedge\varphi^*\,dx^p\\ &= \varphi^*f\,d\varphi^*x^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^*x^p.\end{aligned}$$

由於 d 是個導運算又滿足 $d^2=0$ ，所以

$$d\varphi^*\theta = d\varphi^*f\wedge d\varphi^*x^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^*x^p = \varphi^*\,d\theta. \quad \square$$

定理 4.9.2（Stokes定理） 假設 $p>0$，而C為 p 鏈。取 θ 為一個定義於C之所有 p 方塊之像域之上的（$p-1$）形。則有：

$$\int_C d\theta = \int_{\partial C}\theta.$$

證明 由線性我們只需就C等於單獨一個 p 方塊（α，ω）的情形來證明這定理便可。因此令：

$$\alpha^*\theta = \sum_i(-1)^{i-1}f_i\,du^1\cdots du^{i-1}\,du^{i+1}\cdots du^p.$$

則 $d\alpha^*\theta = \alpha^*\,d\theta = (\sum_i\partial_i f_i)\,du^1\cdots du^p$ 。我們不妨假設 $\omega = du^1\cdots du^p$ ，不然的話只需在兩邊都同時改變符號便可。假設 α 的定義域為 $U: b^i\le u^i\le b^i+c^i$，而 $\alpha_{i\varepsilon}$ 的定義域為U_i 。如果我們對 U_i 指定其第 i 個座標值為 $b^i+\varepsilon c^i$，則它可以看成U的一個面，而基本上 $\alpha_{i\varepsilon}$ 就是等於將 α 局限於這個面來考慮所得的。這時所引入的符號為：

$$\omega_{i\varepsilon} = (2\varepsilon - 1)(-1)^{i-1}\, du^1 \cdots du^{i-1}\, du^{i+1} \cdots du^p.$$

藉著要求這些 $\omega_{i\varepsilon}$ 構成正交單元的（$p-1$）形我們可以把內積 $\langle\ ,\ \rangle_{p-1}$ 推廣而定義於 R^p 之（$p-1$）形。這時：

$$\langle \alpha_{i\varepsilon}{}^*\theta, \omega_{i\varepsilon}\rangle_{p-1} = \langle \alpha^*\theta, \omega_{i\varepsilon}\rangle_{p-1} = (2\varepsilon - 1)f_i$$

因此可得：

$$\begin{aligned}\int_{\partial(\alpha,\omega)} \theta &= \sum_{i,\varepsilon} \int_{(\alpha_{i\varepsilon},\ \omega_{i\varepsilon})} \theta \\ &= \sum_{i,\varepsilon} \int_{U_i} (2\varepsilon - 1) f_i \Big|_{u^i = b^i + \varepsilon c^i} d\mu_{p-1} \\ &= \sum_i \int_{U_i} f_i \Big|_{u^i = b^i}^{u^i = b^i + c^i} d\mu_{p-1}.\end{aligned}$$

可是另方面我們也有：

$$\int_U \langle \alpha^*\, d\theta, \omega\rangle_p\, d\mu_p = \sum\nolimits_i \int_U \partial_i f_i\, d\mu_p.$$

對於 $\int_U \partial_i f_i\, d\mu_p$ 我們將第 i 個變數考慮爲 Fubini 定理第一步驟中的積分變數可得：

$$\begin{aligned}\int_U \partial_i f_i d\mu_p &= \int_{U_i} \int_{b^i}^{b^i + c^i} \partial_i f_i(u^1, \ldots, u^i, \ldots, u^p)\, du^i\, d\mu_{p-1} \\ &= \int_{U_i} [f_i(u^1, \ldots, b^i + c^i, \ldots, u^p) \\ &\qquad - f_i(u^1, \ldots, b^i, \ldots, u^p)]\, d\mu_{p-1},\end{aligned}$$

其中的第二個等式裏當然我們使用了微積分的基本定理。這結果顯然與稍前 $\int_{\partial(\alpha,\omega)} \theta$ 的結果相同。□

下面的系可用以得到 E^2 或 E^3 中的 Green 公式。

系 1（部分積分） 在定理中同樣的假設之下假設 f 是個定義於 θ 之定義域上面的實值函數，則有：

$$\int_C df \wedge \theta = \int_{\partial C} f\theta - \int_C f\, d\theta.$$

更一般而言，若 θ 爲 p 形，τ 爲 q 形而 C 是一個（$p+q+1$）鏈，則有：

$$\int_C d\theta \wedge \tau = \int_{\partial C} \theta \wedge \tau - (-1)^p \int_C \theta \wedge d\tau.$$

證明　只需注意 d 是個導運算而適當移項立即得證。

系 2 假設 M 是個 d 維的緊緻具號流形而 θ 是 M 上的一個（$d-1$）形。則必定 $\int_M d\theta = 0$，而 $d\theta$ 必定在某點爲零。

證明　根據定理4.6.5在 M 中存在一個 d 鏈 C 能夠給出 M 的參數化，而且這時的 ∂C 會等價於零。因此立即有：

$$\int_M d\theta = \int_C d\theta = \int_{\partial C} \theta = \int_0 \theta = 0.$$

而爲證明定理的後一部分，我們不妨假設 M 是連通的，不然的話只需將 θ 限制到 M 的一個連通的成分來考慮就是。取 Ω 爲 M 上的體積元素，則 $d\theta = f\Omega$，其中 f 是 M 上的一個實值的平滑函數。對於 C 中任何一個 p 方塊（α_i，ω_i）而言，

$$\langle \alpha_i{}^* d\theta, \omega_i \rangle_d = f \circ \alpha_i \langle \alpha_i{}^* \Omega, \omega_i \rangle_d$$

在 α_i 的正則點 x 的符號跟 $f(\alpha_i x)$ 的符號相同。由於

$$\sum_i \int_{(\alpha_i, \omega_i)} \langle \alpha_i{}^* d\theta, \omega_i \rangle_d \, d\mu_d = 0,$$

可見 f 或者恒等於零，或者不在所有地方都具有同樣的符號，因此由通常

的均值定理可知 f 一定在某點等於零。□

實例　Stokes 定理常伴隨著一個黎曼結構來加以運用。在一個具號的非緊緻的黎曼流形上有時候可以找得到一個 $(d-1)$ 形 θ 使得其 $d\theta$ 正好是黎曼體積元素。這時由 Stokes 定理可知這個 θ 在某領域之邊界上的積分正好等於這個領域的 d 維體積。在 E^2 我們可以考慮：

$$\theta = x\,dy,\ -y\,dx,\ \text{或者}\ ax\,dy - by\,dx,\ a+b=1$$

他們都有上述性質。在 E^3 則可考慮：

$$\theta = x\,dy\,dz\ ,\ y\,dz\,dx\ \text{或者}\ z\,dx\,dy\ \text{等等}$$

也均有上述性質。因此當我們把 $x\,dy$ 沿著一條 E^2 中的單純封閉曲線的正方向加以積分，那麼就得出這曲線所包含領域的面積。同樣當我們把 $x\,dy\,dz$ 在 E^3 中某領域的邊界上加以積分所得的結果就等於這領域的體積。

我們可以把 E^3 上通常的 Laplace 算子 $\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$，推廣成黎曼流形上的 Laplace-Beltrami 算子 $\nabla^2 f = *d*df$。對於這種涉及 ∇^2 的偏微分方程式，我們就可以運用 Stokes 定理來證明其唯一性方面的定理。例如考慮 Poisson 方程式：$\nabla^2 f=\rho$，則在一個緊緻具號連通的流形上若此方程式有解，則除了一個任意常數項之外，此解爲唯一的。特別 $\nabla^2 f=0$ 之解，就是調和函數，只可能爲常數。要證明這些結果我們考慮單形 θ，則 $\theta \wedge *\theta$ 是體積元素的非負倍數。這倍數只在 $\theta=0$ 之點才等於零。現在假設 f_1，f_2 爲 $\nabla^2 f=\rho$ 之解，則 $g=f_1-f_2$ 爲調和函數，或即 $d*dg=0$。以部分積分法對 $0=g(d(*dg))$ 加以計算，而由於 ∂M 等價於 0 鏈，而有：

$$0=\int_M g\, d*dg = -\int_M dg\wedge *dg.$$

但是 $dg\wedge *dg$ 這個體積元素的非負倍數之積分爲零的必要條件爲 $dg\wedge *dg$ 恒等於零，因此 $dg=0$，而知 g 在 M 的連通成分上必須爲常數。□

習題 4.9.1 試證微積分的基本定理是 Stokes 定理的特殊情形。

習題 4.9.2 試在 E^n 上找出一個徑向對稱的 ($n-1$) 形 θ 滿足 $d\theta = du^1 \cdots\cdots du^n$ 。

習題 4.9.3 將 Poisson 方程式之唯一性定理推廣到一個具有邊界之流形上之函數的情形，這時我們預先指定此函數在邊界上之值。所得的定理是解爲唯一的，而不再能自由加入一個常數。由於 ($d-1$) 形 $*dg$ 在邊界上的值基本上只不過是 g 在邊界處沿著法線方向的導數，因此如果我們指定這些在邊界的法線方向的導數值，也能得出唯一性的定理。

習題 4.9.4 假設 θ 是 M 上的 p 形滿足對於 M 中的每一個 ($p+1$) 方塊 C 都有 $\int_{\partial C} \theta = 0$ ，試證 θ 必定是封閉的。提示：請參考習題 4.8.1 。

習題 4.9.5 記得對每個 p 而言，所有 p 鏈的集合都構成一個實係數向量空間 $\mathscr{C}_p$ 。我們把其對偶空間 $\mathscr{C}_p^*$ 中的元素稱爲 **p 餘鏈** (p-cochain)。而定義**餘緣運算** (coboundary operator) ： $\partial^*: \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ 如下：

$$(\partial^* f) C_{p+1} = f(\partial C_{p+1}).$$

這個 ($p+1$) 餘鏈 $\partial^* f$ 就稱爲原來 p 鏈 f 的餘緣。試證明 ∂^* 是個線性的運算，而且 $\partial^*\partial^* = 0$ ，此即對於任意 f 都有 $\partial^*\partial^* f = 0$ 。

習題 4.9.6 對於定義於 M 之上的每一個 p 形 τ 存在如下相應的映射 f_τ: $\mathscr{C}_p \to R$ 定義爲：

$$f_\tau C_p = \int_{C_p} \tau.$$

試證這個 f_τ 是個 p 餘鏈，而且試證將 τ 指定到 f_τ 的映射是個線性映射。

習題 4.9.7 餘鏈 f 若滿足 $\partial^* f = 0$ ，則稱爲**餘輪** (cocycle) 試證若 τ 爲

封閉的 p 形，則 f_τ 爲餘輪。

習題 4.9.8　考慮餘鏈 f，如果存在另個餘鏈 g 使得：$f=\partial^* g$，則說 f 是個餘緣。試證若 τ 是恰當的，則必定 f_τ 是個餘緣。

4.10　微分系統

有許多的偏微分方程式系統可以透過微分形來給出幾何式的講法。其原因說穿了其實非常簡單。譬如說，在 R^5 中假設 x，y，z，p，q 爲座標，又取 S 爲一個二維的子流形，在其上 x 與 y 可以取爲其座標（意即獨立的變數）。則在 S 上 $p=\partial z/\partial x$ 以及 $q=\partial z/\partial y$ 的條件就可以表成微分形 $dz-p\,dx-q\,dy$ 在 S 上等於零。

現在一個一階的偏微分方程式可以由方程式：

$$F(x, y, z, p, q)=0.$$

來給出。這方程式就決定了 R^5 中的一個四維的超曲面 N。至於這偏微分方程式的一個解，例如 $z=f(x, y)$，就決定了 N 上的一個二維的參數化的子流形 S：

$$z=f(x, y),\ p=(\partial_x f)(x, y),\ q=(\partial_y f)(x, y).$$

如果我們在 N 上考慮由方程式 $dz-p\,dx-q\,dy=0$ 所給出的三維切子束 D，則我們可以將 S 看成是 D 的一個積分子流形。因爲 D 的定義式可換寫爲對於所有 N 中之 n，D 指定的切空間滿足

$$D(n)=\{t \mid t\in N_n \text{ 以及 } \langle t, dz-p\,dx-q\,dy\rangle=0\}.$$

當然這時可能遇到幾個困難，是由於退化性的緣故。所以我們必須先把使得 F 與 dF 同時爲零之點除外，因爲在這種點的鄰域 N 不見得是個流形。另外如果在 N 中的某點 n 正好 dF 與 $dz-p\,dx-q\,dy$ 成比例，則 $D(n)$ 就等於整個切空間 N_n，而知切子束 D 不是在每點都指定三維的子空間。最後，我們必需適當的選擇解曲面 S 使得 x 跟 y 可以取爲其上的座標。同時

一般而言這兒的切子束D也不見得爲完全可積分。

在目前對於偏微分方程式的研究工作中上面這種講法以及其推廣的處理法並沒有被廣泛的加以使用。可是如果所處理的偏微分方程式是解析的，則E. Cartan 就使用這方法得出了一些結果。我們認爲對偏微分方程式這種幾何式的講法確能對於此偏微分方程式之解的瞭解給出透徹而直觀的認識，因此在下面我們預備將上面這實例加以抽象化，而給出一些與切子束互相對偶的結構。特別我們要導引出 Frobenius 定理的對偶講法。請參考第 3.11 節及 3.12 節。

假設M是個流形，如果對於每點$m \in U \subset M$我們都指定餘切空間M_m^*中的一個k維的子空間$\Delta(m)$，則說我們在M上考慮了一個k維的餘切子束Δ。如果Δ之定義域U爲開集合，而且對於其中每一點m都存在一個鄰域V以及V上的微分形$\omega^1, \ldots\ldots, \omega^k$使得就$V$中的每一點$n$，我們的餘切子束$\Delta$所指定的子空間$\Delta(n)$正好都是由$\omega^1(n), \ldots, \omega^k(n)$所生成，則說$\Delta$是平滑的。顯然任意給出一個$k$維的餘切子束$\Delta$，就可以相應的考慮一個$d-k$維的切子束$D$，給爲$D(m) = \{t \mid t \in M_m, \langle t, \omega\rangle = 0$對所有$\omega \in \Delta(m)$成立$\}$。反過來任意給出一個$(d-k)$維的切子束$D$我們就可以考慮其相應的$k$維餘切子束$\Delta$定義爲：

$$\Delta(m) = \{\omega \mid \omega \in M_m^*, \langle t, \omega\rangle = 0 \text{ 對所有的 } t \in D(m)\}$$

由這定義立即看出若D相應於Δ，則必定Δ相應於D。這樣彼此相應的一組D與Δ就說彼此互相消滅 (annihilate) 對方。如果其一爲平滑，則另一自然也是平滑的。

M中的子流形N稱爲是某個餘切子束Δ的積分子流形，如果這個N是其相應的切子束D之積分子流形。因此我們也說Δ是完全可積分的倘若其相應的D是完全可積分的。

在定理 3.12.1 的 Frobenius 定理中我們已經知道如果D是個完全可積分的切子束，那麼就會存在一組座標系統x^i使得$D(m)$正好可以由$\partial_1(m), \ldots\ldots, \partial_h(m)$所張開，而且$D$之$h = (d-k)$維的積分子流形正好就是那些座標切片$x^\alpha = c^\alpha, \alpha = h+1, \ldots, d$。從這結果我們看出與$D$相應的餘切子束$\Delta$在這座標鄰域中正好就由這$k$個$dx^\alpha$，$\alpha = h+1$，…

，d 所張開而得。因爲 $x^\alpha = c^\alpha$ 的條件與 $dx^\alpha = 0$ 的條件實際上傳達了相同的意思。在歷史上人們在表達切子束 D 時常直接就使用這種對偶的寫法：若 ω^α 是其相應餘切子束 Δ 的一組局部基，則就以 $\omega^\alpha = 0$ 來記這個切子束 D。由於人們常把單形看成是餘切空間裏的無窮小位移，因此 $\omega^\alpha = 0$ 表示我們只容許這些無窮小的位移落在切子束 D 的各方向上。至於屬於 Δ 的任何單形皆可表爲 $\omega = f_\alpha dx^\alpha$，其中 α 是從 $h+1$ 到 d 的取和指標。其外導數 $d\omega = df_\alpha \wedge dx^\alpha$ 可以看如 dx^α 以單形的係數 df_α 所給的「線性」組合。假設 ω^α 是 Δ 的另外一組局部基，則有 $dx^\alpha = g^\alpha_\beta \omega^\beta$，其中 (g^α_β) 是由平滑函數所組成的 $k \times k$ 非奇異方陣。而有：

$$d\omega = df_\alpha \wedge dx^\alpha = (g^\alpha_\beta \, df_\alpha) \wedge \omega^\beta,$$

因此 $d\omega$ 也照樣表示成 ω^β 的「線性」組合，其中的係數爲單形。這樣已經證明了 Δ 爲完全可積分的必要條件是對於 Δ 中的每個單形 ω 而言其 $d\omega$ 必定可以表成一組局部基 ω^α 的線性組合。在下面的定理我們預備證明這條件也是個充分條件，這就是 Frobenius 定理的對偶定理。

定理 4.10.1 平滑餘切子束 Δ 爲完全可積分的充要條件是：對於 Δ 中的每一個單形 ω，其外微分形 $d\omega$ 這個 2 形在局部上總可以表成 Δ 之局部基 ω^α 的線性組合 $d\omega = \tau_\alpha \wedge \omega^\alpha$，其中 τ_α 是一些單形的係數。

證明 我們已經證明了當 Δ 是完全可積分的，那麼 $d\omega$ 應該可以寫成這種線性組合。

現在反過來假設對於任意單形 $\omega \in \Delta$，其 $d\omega$ 總可表爲這種線性組合。特別考慮 ω^α 爲 Δ 的一組局部基，則有 $d\omega^\alpha = \tau^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$，其中 τ^α_β 是一些單形。若 D 爲其相應的切子束，而 X，Y 爲 D 中任意的向量場，則有：

$$2\, d\omega^\alpha(X, Y) = \tau^\alpha_\beta(X)\omega^\beta(Y) - \tau^\alpha_\beta(Y)\omega^\beta(X) = 0.$$

但是根據第 4.3 節中有關 d 的公式，我們應有：

$$2\, d\omega^\alpha(X, Y) = X\omega^\alpha(Y) - Y\omega^\alpha(X) - \langle [X, Y], \omega^\alpha \rangle = -\langle [X, Y], \omega^\alpha \rangle,$$

因爲 $\omega^a(X)$ 與 $\omega^a(Y)$ 皆爲零。這樣看出 X 與 Y 的李乘積：$[X,Y]$ 也會被 Δ 的一組基 ω^a 所消滅，而知 $[X,Y]\in D$。這證明了 D 是對合的。因此根據 Frobenius 定理 D 應該是完全可積分的，或即 Δ 是個完全可積分的餘切子束。□

敍述定理 4.10.1 之可積分性條件的另一種寫法就是要求對於所有的向量場 X，$Y\in D$，都滿足 $d\omega(X,Y)=0$，此即 D 能消滅 $d\omega$。更一般而言，任意維數之積分子流形 N 之切空間都能消滅 $d\omega$，只要 ω 落在 Δ 中。事實上，如果 $I:N\to M$ 代表包含映射，則 N 爲積分子流形意表 $I^*\omega=0$ 對所有 $\omega\in\Delta$ 都能成立。因此 $d(I^*\omega)=I^*(d\omega)=0$，或即對於所有切於 N 的向量場 X 與 Y 都有 $d\omega(X,Y)=0$。這些考慮就促使我們將一個向量場局限於某個積分子流形 N 的切空間來考慮，以便得出某些能切於 N 的向量場，正如下面定理中所做的：

定理 4.10.2 令 Δ 是個平滑的餘切子束，而取 X 是落在相應的切子束 D 中的一個平滑的向量場。則對於每個能與 X 相切的積分子流形 N 而言，若 $\omega\in\Delta$，則微分形 $i(X)d\omega$ 必能消滅 N 的切空間。特別，如果存在某個 $X\in D$ 及 $\omega\in\Delta$ 能使得 $i(X)d\omega$ 不落在 Δ 之中，則必定這個 Δ 不是完全可積分的。

證明 對於 N 上任何其他的向量場 Y，從上面我們已知 $d\omega(X,Y)=0$，因此 $\langle Y,i(X)d\omega\rangle=2d\omega(X,Y)=0$。所以 $i(X)d\omega$ 能消滅 N 的切空間。現在如果存在一個 $X\in D$ 以及一個 $\omega\in\Delta$ 使得 $i(X)d\omega$ 不在 Δ 之中，那麼通過那些使得 $i(X)d\omega\notin\Delta$ 之點就不可能存在 D 的 k 維積分子流形 N。不然的話，X 就得與 N 相切，因此根據第一項結果 N 就應該是由 Δ 以及 $i(X)d\omega$ 所張開的 $(k+1)$ 維餘切子束的積分子流形，因此 N 的維數變成小於或等於 $(k-1)$。□

註：一旦 2 形 $d\omega$ 已經取得了，我們可以代數地將其局限於一個積分子流形的切空間上。因此可以逐點加以考慮。這樣我們可以把上面的定理

改成對於在某點 n 之切向量 $x \in N_n$ 來敍述，我們也可以將其改成對於 N 中某條曲線的切向量場來考慮。這些事實可以解釋成：當我們給定了**始值**（initial value）或者**邊界值**（boundary value），則解曲面之切空間可能就被限制在這些值。事實上如果某些方向沒有受到足夠的限制，那麼這些方向就是例外的，而不可能切於邊界值子流形。他們特別被稱爲這系統的**特徵向量**（characteristics）。

接下來我們考慮具有一個非獨立變數 z 以及 n 個獨立變數 x^1，……，x^n 的一階偏微分方程式。令 $p_i = \partial_i z$，則這種方程式可以藉著 R^{2n+1} 上的平滑函數 F 來給出如下：

$$F(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0.$$

事實上我們如果考慮方程式 $F = c$，c 爲常數，則並沒有比較困難。這方程式的一個解函數 $z = f(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，再加上其所滿足的 n 條方程式：$p_i = \partial_i f(x^1, \ldots, x^n)$，就決定了 R^{2n+1} 空間中的一個 n 維的子流形。如果我們考慮由：

$$\omega^0 = dF \quad 以及 \quad \omega^1 = dz - p_i\, dx^i.$$

所張開的二維餘切子束 Δ，則這個 n 維的子流形當然是 Δ 的一個積分子流形。當然在這些考慮中必須限制於 F^{2n+1} 中的開子流形 M，使得在其上 ω^0 及 ω^1 彼此線性無關。反過來，Δ 的任何一個以 x^1，……，x^n 爲座標的 n 維積分流形都能給出我們偏微分方程式的一個解函數。爲說明這事，令 D 爲相應於 Δ 的切子束。

由於 $d\omega^0 = d^2F = 0$，我們只需使用 $d\omega^1 = dx^i dp_i$ 來給出定理 4.10.2 中對積分子流形之切空間所需加進來的限制條件。因此我們只需尋求那些能使得 $i(X)d\omega^1 \in \Delta$ 的向量場 X，這些向量場稱爲 Δ 的特徵向量場。若以 ∂_i，P^i 及 ∂_z 分別代表座標 x^i，p_i 及 z 的座標向量場，則可將 X 表成 $X = X^i\partial_i + Q_iP^i + X_z\partial_z$。這兒是假設 $X \neq 0$，$X \in D$，而且存在平滑函數 f，g 滿足 $i(X)\,d\omega^1 = f\omega^0 + g\omega^1$。從這些條件我們得：

$$\omega^0(X) = \omega^1(X) = 0$$

以及

$$X^i\,dp_i - Q_i\,dx^i = f(F_i\,dx^i + G^i\,dp_i + F_z\,dz) + g(dz - p_i\,dx^i),$$ 其中 $G^i = p^iF$

因此 X 的成分 X^i，θ_i 以及 X_z 以及 f 與 g 之間滿足如下的條件：

$$\begin{aligned}
F_iX^i + G^iQ_i + X_zF_z &= 0,\\
-p_iX^i + X_z &= 0,\\
Q_i &= -fF_i + gp_i,\\
X^i &= fG^i,\\
0 &= fF_z + g.
\end{aligned}$$

這兒的第一個條件可以由其他四條得出。而實際解後面四個條件可得：

$$X = f(G^i\partial_i - [F_i + p_iF_z]P^i + p_iG^i\partial_z).$$

這結果使我們得出如下幾個結論：第一，特徵向量場 X 除了一個係數倍數 f 之外是唯一決定的。第二，我們可以選擇任何一個全都不爲零的函數 $f \neq 0$。目的就是使 X 不在任何點爲零向量。因爲如果在某點 $X = 0$，則 $G^i\partial_i - [F_i + p_iF_z]P^i + p_iG^i\partial_z = 0$，因此：

$$G^i = 0 \text{ 又 } F_i = -p_iF_z,$$

這就使得：

$$\omega^0 = dF = F_z(-p_i\,dx^i + dz) = F_z\omega^1,$$

因此顯明在 $X = 0$ 之點 ω^0 及 ω^1 就變成線性相關了，這是矛盾的。最後我們給出第三個結論，就是單微分形

$$i(X)\,d\omega^1 = f(\omega^0 - F_z\omega^1)$$

除了一個實係數倍數之外爲獨一的。我們把這些結果組合起來而成爲下面這個定理：

定理 4.10.3 (a) 一個一階偏微分方程式的二維餘切子束：

$$\Delta = \{dF, \omega^1 = dz - p_i\, dx^i\}$$

具有一個單獨的由特徵向量場所組成的一維的切子束Φ。

(b) 這個切子束Φ是由向量場 $X = G^i\partial_i - [F_i + p_iF_z]P^i + p_iG^i\partial_z$，所生成，其中：$dF = F_i\, dx^i + G^i\, dp_i + F_z\partial_z$.

(c) 如果D是相應於Δ的切子束，則線性映射

$$i(\cdot)\, d\omega^1 : D \to T^*M$$

是個非奇異的映射，而且其像域與Δ之交集是一個一維的餘切子束，就是Φ在$i(\cdot)d\omega^1$之下的影像。

(d) 假設$E(m)$是$D(m)$中的一個k維的子空間，在其中不含$\Phi(m)$中任何非零的向量，則$\Delta(m)$與$i(E(m))d\omega^1$合在一起張開M_m^*中一個$(k+2)$維的子空間。

(e) 如果N是Δ的一個n維積分子流形，則對於每一點$m \in N$，N中必包含一條經過m點的特徵曲線，此即Φ的一個積分子流形。

證明 (a)，(b)及(c)這三部分已於前面證畢。至於(d)則立即可由(c)得出，因爲$i(E(m))d\omega^1$是M_m^*中的一個k維子空間，而只跟$\Delta(m)$相交於0。

現在假設N是Δ的一個n維的積分子流形，而且其中存在點$m \in N$滿足$X(m) \notin N_m$。這時可以應用(d)項的結果到$E(m) = N_m$，其中$k = n$的情形。根據定理4.10.2 N_m會被$\Delta(m) + i(N_m)\, d\omega^1$所消滅。可是$\Delta(m) + i(N_m)\, d\omega^1$之維數爲$n+2$，因此只能消滅一個其維數爲$2n+1-(n+2) = n-1$的子空間，這產生了一個矛盾。因此結論是對於每一點$m \in N$，全部有$X(m) \in N_m$。若$I : N \to M$代表包含映射，則這表示$X$應與一個在$N$上的向量場$X_N$互相$I$相關。這$X_N$的積分曲線在$I$之下被映射成$X$的積分曲線，而$X$的積分曲線的像域就是一條特徵曲線，如此證畢(e)。□

註：定理4.10.3的(e)基本上是一個唯一性的定理，但是就像一般的唯一性定理，這定理也自然的給出有關解的存在性方面的資料。特別，如

果我們有辦法找到一個與 Φ 互相横截相交的 $(n-1)$ 維積分子流形，那麼我們把這子流形沿著特徵曲線推動就得出一個 n 維的積分子流形了。當 $n=2$ 時情形特別簡單，這時只要找出一個與 X 無關的向量場：$Y\in D$，而取其積分曲線，我們就立即得出能與 Φ 横截相交的一維積分子流形了。

定理 4.10.4 假設 P 是 Δ 的一個 $(n-1)$ 維的積分子流形滿足對於每點 $m\in P$ 都有 $X(m)\notin P_m$。令 $\{\mu_t\}$ 爲 X 的流線。則對於所有有定義的點 $\mu_t p$，其全體 $N=\{\mu_t p|p\in P\}$ 就構成 Δ 的一個 n 維的積分子流形。

證明 首先我們先來說明爲什麼 N 是一個子流形。如果 $\mu_t p$ 有定義，則存在一個 p 點在 P 中的座標鄰域 V 以及 $\varepsilon>0$，使得只要 $q\in V$ 以及 $t-\varepsilon<s<t+\varepsilon$，則 $\mu_s q$ 就有定義。這時我們就取 $\mu_s q$ 的座標爲 q 點的那 $n-1$ 個座標以及 s。

N_m 中任何一個切向量都可表爲 $X(m)$ 以及一個形如 $\mu_{t*}Y$ 之向量的線性組合，其中 $Y\in P_p$ 又 $m=\mu_t p$。由於已有 $X\in D$，我們只需證明對於所有這種 Y，都有 $\mu_{t*}Y\in D(m)$。換言之，要證明 $\omega^0(\mu_{t*}Y)=\omega^1(\mu_{t*}Y)=0$。現在固定一個 Y，而令：

$$ft=\omega^0(\mu_{t*}Y) \text{ 及 } gt=\omega^1(\mu_{t*}Y).$$

由於 P 爲 Δ 之積分子流形，我們知道 $f0=g0=0$。現在想要使用 ω^0 與 ω^1 對於 X 的李導數來把 f 與 g 的導數寫出來。事實上我們有：

$$L_X\omega^\alpha=d/dt(0)(\mu_t{}^*\omega^\alpha).$$

因此得到：

$$\begin{aligned}f's&=\frac{d}{dt}(0)f(t+s)=\frac{d}{dt}(0)(\omega^0(\mu_{t*}\mu_{s*}Y))\\&=\frac{d}{dt}(0)(\mu_t{}^*\omega^0(\mu_{s*}Y))=L_X\omega^0(\mu_{s*}Y),\end{aligned}$$

同樣也有：$g's=L_X\omega^1(\mu_{s*}Y)$。但是根據定理 4.4.2 我們有公式：

$$L_X = i(X)\,d + di(X)$$

由 $\omega^0 = dF$ ，立即得：

$$L_X\omega^0 = i(X)\,d^2F + di(X)\omega^0 = 0 + d0 = 0,$$

這表明 $f' = 0$ ，因此 f 是個常數，而知 $f = 0$ 。

另方面以前已得到 $i(X)\,d\omega^1 = \omega^0 - F_z\omega^1$，因此有：

$$L_X\omega^1 = i(X)\,d\omega^1 + di(X)\omega^1 = i(X)\,d\omega^1 = \omega^0 - F_z\omega^1.$$

將這單形作用於向量場 $\mu_{s*}Y$ 就看出 g 應該滿足如下的線性一階常微分方程式：

$$g's = fs - F_z(\mu_s p)gs = -F_z(\mu_s p)gs.$$

可是我們知道 $g(0) = 0$ 是始值條件，因此必須 g 本身就等於零才可。□

習題 4.10.1 假設 Δ 與 X 如上所述，試證存在 Δ 的局部基 θ^0，θ^1 滿足 $i(X)\,d\theta^0 = 0$ 以及 $i(X)\,d\theta^1 = 0$ 。

習題 4.10.2 試證在每點 m ，Δ 的一個積分子流形的切空間可以有多種可能的選法。特別我們可以選取如下的一組基，令 $X_0 = X(m)$ ，取 X_1 爲 $D(m)$ 中能被 ω^0，ω^1 消滅的向量，又對每一個 $k = 1$，……，$n-1$ ，選 $X_k \in D(m)$ 要能被 $\omega^0, \omega^1, i(X_1)\,d\omega^1, \ldots, i(X_{k-1})\,d\omega^1$ 所消滅。

第四章習題提示

4.2.1 (a) 對 j_1，……，j_p 做任意排列成 k_1，……，k_p 而使其不再遞增時所算出的項 $dx^{i_1}(\partial_{k_1})\cdots\cdots dx^{i_p}(\partial_{k_p})$ 一定等於零。因此在全部 $p!$ 種算法中只能留下一項來，正如所示。

4.3.1 grad $= d$ ，curl $= *d$ ，div $= *d*$ ，$** = id$

(d) $\operatorname{div}(\theta\times\tau) = *d*(*(\theta\wedge\tau))$

$$
\begin{aligned}
&= *d(\theta\wedge\tau)\\
&= *(d\theta\wedge\tau-\theta\wedge d\tau)\\
&= *(**d\theta\wedge\tau)-*(\theta\wedge**d\tau)\\
&= *(*\operatorname{curl}\theta\wedge\tau)-*(\theta\wedge*\operatorname{curl}\tau)\\
&= (\operatorname{curl}\theta)\cdot\tau-\theta\cdot(\operatorname{curl}\tau)
\end{aligned}
$$

4.3.3 (b) $\nabla f = f_{rr}+f_{zz}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$

(c) dr, $r\sin\varphi\, d\theta$, $r\, d\varphi$ 爲一組正交單元基，因此有：

$$*dr = r^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\ ;\ *d\theta = \frac{1}{\sin\varphi}d\varphi\, dr\ ;\ *d\varphi = \sin\varphi\, dr\, d\theta$$

$$*dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{r^2\sin\varphi}$$

$$\nabla f = f_{rr}+\frac{2}{r}f_r+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi}+\frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}f_\varphi$$

4.3.4 設單形 $\theta = f\,dx+g\,dy+h\,dz$，則能計算得

$$
\begin{aligned}
&(d*d*-*d*d)\theta\\
&= (f_{xx}+f_{yy}+f_{zz})dx+(g_{xx}+g_{yy}+g_{zz})dy\\
&\quad +(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz})dz
\end{aligned}
$$

因此就是作用於單形之Laplace算子$\nabla^2\theta$，而可寫爲：

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\theta &= d(*d*\theta)-*d(*d\theta)\\
&= \operatorname{grad}\operatorname{div}\theta-\operatorname{curl}\operatorname{curl}\theta
\end{aligned}
$$

4.4.1 (2) $(L_X\theta)(Y,Z) = i(X)d\theta(Y,Z)+di(X)\theta(Y,Z)$

$$
\begin{aligned}
&= 3\,d\theta(X,Y,Z)+\frac{1}{2}(Y\,i(X)\theta(Z)-Z\,i(X)\theta(Y)\\
&\quad -i(X)\theta([Y,Z]))\\
&= X\theta(Y,Z)-Y\theta(X,Z)+Z\theta(X,Y)-\theta([X,Y],Z)\\
&\quad +\theta([X,Z],Y)-\theta([Y,Z]X)+Y\theta(X,Z)\\
&\quad -Z\theta(X,Y)-\theta(X,[Y,Z])\\
&= X\theta(Y,Z)-\theta([X,Y],Z]-\theta(Y,[X,Z])\\
&= X\theta(Y,Z)-\theta(L_XY,Z)-\theta(Y,L_XZ)
\end{aligned}
$$

此式可以解釋成：

$$L_X(\theta(Y,Z)) = (L_X\theta)(Y,Z) + \theta(L_XY, Z) + \theta(Y, L_XZ)$$

4.5.1 將 curl $X = yi + zj + xk$ 對應成 2 形：

$$\tau = y\,dydz + z\,dzdx + x\,dxdy$$

則立即可知 $d\tau = 0$。因此取 $\theta = H\tau$ 而爲：

$$\theta = \frac{1}{2}z^2\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy + \frac{1}{2}y^2\,dz$$

$$\rightarrow X = \frac{1}{2}(z^2 i + x^2 j + y^2 k)$$

這個 X 確能滿足所求。

4.5.2 在 R^3 中考慮，給定 $\tau = f\,dydz + g\,dzdx + h\,dxdy$，想求得 $\theta = p\,dx + q\,dy + r\,dz$ 滿足 $d\theta = \tau$，或即：

$$q_x - p_y = f\ ;\ p_z - r_x = g\ ;\ r_y - q_z = h$$

這時的可積分條件爲 $d\tau = 0$，或即 $f_x + g_y + h_z = 0$。

4.5.3 設 $(x^1, \cdots\cdots, x^d)$ 爲其座標，$r^2 = x_1^2 + \cdots\cdots + x_d^2$，取

$$\tau = \frac{1}{r^d}\left(x^1 dx^2 \cdots\cdots dx^d - x^2 dx^1 dx^3 \cdots\cdots dx^d + \cdots\cdots + (-1)^{d-1} x^d dx^1 \cdots\cdots dx^{d-1} \right)$$

4.9.1 設 $F'(x) = f(x)$，則有 $dF = f\,dx$，因此若 $C = [0, t]$ 爲一維的方塊，則有

$$\int_C dF = \int_{\partial C} F = F(t) - F(0)$$

而得證

$$\int_0^t f(x)\,dx = F(t) - F(0)$$

4.9.2 取 $\tau = \dfrac{1}{n}\left(u^1 du^2 \cdots\cdots du^n - u^2 du^1 du^3 \cdots\cdots du^n + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} u^n du^1 \cdots\cdots du^{n-1} \right)$ 就能滿足 $d\tau = du^1 du^2 \cdots\cdots du^n$，而且

這個 τ 是徑向對稱的。

例如當 $n=2$ 時，就是 $\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}r^2\,d\theta$，當 $n=3$ 時就是 $\frac{1}{3}(x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy)=\frac{1}{3}r^3\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$，因此全都是徑向對稱的微分形。

4.9.7 $\partial^* f_\tau(C_{p+1})=f_\tau(\partial C_{p+1})=\int_{\partial C_{p+1}}\tau=\int_{C_{p+1}}d\tau=\int_{C_{p+1}}0=0$
這是對於任意 $(p+1)$ 鏈全都成立的，因此 $\partial^* f_\tau=0$ 而知 f_τ 是個餘輪。

4.9.8 設 τ 這 p 形是恰當的，則存在 $(p-1)$ 形 θ 使得 $\tau=d\theta$，這時對任意的 p 鏈 C_p 都有：

$$f_\tau(C_p)=\int_{C_p}\tau=\int_{C_p}d\theta=\int_{\partial C_p}\theta=f_\theta(\partial C_p)=(\partial^* f_\theta)(C_p)$$

可見 $f_\tau=\partial^* f_\theta$，而知 f_τ 是個餘緣。

第五章

黎曼與半黎曼流形

5.1 導論

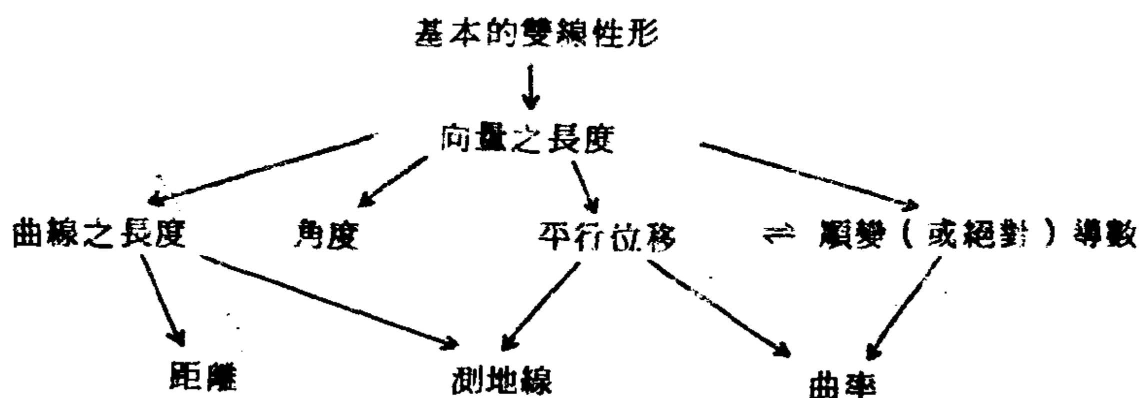
給定一個流形，我們最盼望的就是能夠在其上講述並構造出儘多的我們通常經驗裏所熟知的各種概念。這些可以被推廣並談論的概念可能包含像距離，角度，平行線，直線，還有沿著一條曲線的平行位移（這觀念在歐氏空間裏根本是無聊的）等等。至於要眞的選擇那一些特別的性質來推廣到我們這流形上，大概其主要的依據是決定於這些概念必須要能夠在環面上，在蛋形橢圓曲面上，以及在一些或許更不規則的曲面上也都能講得通。可是在這幾個基本的流形上，像平行線的概念，以及有關直線的某些性質看來就好像毫無意義可言，不過另方面像角度，距離，長度以及兩點間最短的連接線等等概念卻好像仍具意義。我們會發現沿著一條曲線將切向量加以平行位移的概念變成一種非常基本而有用的概念，而且發現這一概念十分自然的跟一個向量之長度的一種很合理的想法密切連繫在一起。爲看得更淸楚，我們不妨在 E^3 中隨便一個曲面上畫一條曲線，而且在此曲線的起點畫一個切於此曲面的向量。一般的情況下這個切向量無法被平行的沿著這曲線推移，因爲要是在 E^3 中他們是平行的，則有可能就變得不能切於這曲面了，但是我們是要求這向量必須一直保持與曲面相切的。可是有一種變通的辦法就是容許這切向量可以適度的改變方向，但是要求任何這樣的方向改變其目的只是爲了使這向量保持與曲面相切；換言之，在任何一瞬間，這種方向的變動率必須是一個與此曲面相垂直的法向量。這樣我們就可以得出如何將一個切向量沿著一條曲線加以平移的概念了。

與上述平行位移密切相關的一種觀念就是一個向量場在一個給定的方向或者沿著一條給定曲線的順變導數。這種順變導數（或稱爲絕對導數）的觀念其實就是用來測量這向量場如何偏離一個透過平行位移所得到的向量場。在 E^d 中當我們使用某一個卡氏座標基來表示某向量場的成分時，

這向量場爲平行的條件就是這些成分必須爲一些常數。而爲了要測量一個向量場轉動的程度，我們可以透過求這些成分之導數來給出。這些導數合在一起也構成一個指向該轉動方向的向量之成分。就一個定義於某曲面上的向量場而言，我們所要的只限於落在此曲面之上的旋轉或扭動之部分，因此我們就把導數向量場垂直的投射到這曲面的切平面之上。這樣只有當這向量場的轉動方向是在法線方向時，其投射到切平面之部分等於零，這就符合前面有關向量平行位移的概念與定義了。

在歐氏空間 E^4 中，一條直線除了具有使距離極小化的性質之外，只要假設其參數與距離成比例則這直線的速度向量場就沿著此直線互相平行。考慮隨便一個流形，如果其上的平行位移觀念是由其測距所得來的，則其中一條曲線之具有使距離極小化的性質可由其具有平行速度向量場之性質而得出。事實上除了必要的參數變換外，顚倒過來一個曲線之具有平行速度向量場的性質也可以由其具有使距離極小化之性質而得出。在流形上當我們不考慮距離而只考慮平行性時，爲了要得出一個相應於 E^4 中直線的觀念，我們可以定義一條曲線若具有一個平行的速度向量場則就稱爲是一條測地線。

下面所給的簡表就把流形上可以引入的各種概念列舉並貫串起來，其中的箭頭表示從前者可引出後者。



可是有些例外必須加以留意：就像在相對論中所考慮的，一個不爲零的向量其長度並不見得總是正數，這時角度不再有意義，而負值長度的向量也不易想像，在這些例外的情形我們就另外引入一個向量之能量（energy）的概念，以取代不合用的長度概念。

5.2 黎曼測距與半黎曼測距

本節要開始使用黎曼的做法在流形上發展一套測距的幾何學。因爲在物理模型中這種測距結構會很自然的發生，而且在前節中所提到的許多概念也都可以藉著這個測距來定義出來。這樣透過流形中之測距所建立起來的幾何是屬於這流形內在的性質，是這流形自身的性質，而與此流形外界空間的性質無關。當然爲取得某流形上之黎曼結構有一種通用的方法就是從一個包含這個流形的外界流形，例如 E^k 中的黎曼結構加以限制誘引而來，可是這種誘引的過程或承繼的過程本身並不簡單，可以認爲構成一門專門的學問，本書對這方面並不預備進一步討論。

因此我們單直接從M上本身的測距著手，而令M是一個可微流形。我們說M上的一個平滑對稱（0，2）型張量場 b 若能在整個M上有定義，而且在每一點皆爲非退化，則這個 b 就是M上的一個**測距**(metric)或者**基本雙線性形**(fundamental bilinear form)。

習題 5.2.1 假設M是連通的，試證在M上這測距 b 的指標數(index)是個常數。

如果M不是連通的，則無法證明 b 的指標數是個常數，因此我們只好假設所考慮的測距 b 的指標數總是常數。如果這指標數爲 0 或爲 d (=dim M)，則這測距是正定的或是負定的，我們就說這種測距是個黎曼測距。由這種測距所構造出來的幾何就叫做黎曼幾何，這時 (M, b) 合在一起就稱爲是一個黎曼流形。可是如果 b 的指標數不是 0 也不是 d，則這種測距就稱爲半黎曼測距。特別如果指標數是 1 或者 $d-1$，則這測距稱爲一個**勞倫茲測距**(Lorentz metric)。在 R^d 上如果引入如下的勞倫茲測距：

$$b = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2 - \cdots - du^d \otimes du^d.$$

就稱爲一個**敏氏空間**(Minkowski space)，而記爲 L^d。如果我們忽略重力效應，則 L^d 是有關時空的一個很好的模型。對這敏氏空間之幾何性質的研究就引出一些深刻而重要的相對論現象，就如 Lorentz-Fitzgerald

收縮，以及「同時性」的不再具有任何意義等等。

有時候我們也喜歡把測距用對稱的符號$\langle\ ,\ \rangle = b(\ ,\ )$加以表示。這種寫法常變得十分方便。

一個流形上能夠存在一個黎曼測距的充分條件就是要求這流形具有仿緊緻性（paracompactness），請參閱第 0.17 節。幾乎所有通常的流形實例都具有仿緊緻性，若要特意造出一個不是仿緊緻的流形也不那麼簡單。特別在物理學中的衆多實例全都充斥了黎曼測距（參閱第六章）。

至於勞倫茲測距或者其他半黎曼測距之存在性則需涉及其他的一些拓樸性質。譬如說，一個流形能擁有一個勞倫茲測距的充要條件就是這流形具有一個平滑的一維切子束。而另方面在一個緊緻流形上能具有一個平滑的一維切子束的充要條件就是這流形之 Euler-Poincaré 特徵數爲零。如果一個流形上具有一個無處爲零的平滑向量場，則這向量場能張開一個平滑的一維切子束，因此這流形就具有一個勞倫茲測距。另方面我們知道一個偶數維的球面之 Euler 特徵數等於二，因此在這流形上不可能存在勞倫茲測距。可是若考慮環面，或者奇數維的球面，則都有勞倫茲測距存在。高維的環面上存在有各種測距，其指標數可以是 0 到 d 中的任何一個數目。可是若進一步要研究在一般的情形需要怎樣的流形才能具有任意指標數的測距，則這問題變得十分困難。

5.3 長度、角度、距離與能量

由於只有在黎曼的情形所有長度，角度及距離的觀念才具有明確的意義，因此我們要先暫行假設所考慮的測距 b 是在M上的一個正定的測距。這時我們定義切向量 $v \in M_m$ 的**長度**（length）爲 $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ 又定義兩個M_m 中的非零向量 v 及w 之間的**角度**（angle）θ 爲介於 0 與 π 之間滿足：

$$\cos\theta = \langle v, w\rangle/(\|v\|\cdot\|w\|).$$

之實數。根據習題 2.17.5 我們有不等式 $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$，因此上面這定義式是合理的。

現在定義一條曲線 γ : $[a, b] \to M$的長度 $|\gamma|$ 爲沿此曲線之速度向

量之長度的積分：

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma_* t\|\, dt.$$

定理 5.3.1 一條曲線的長度與此曲線的參數化表示無關。

證明　首先我們注意到對於任何 $a \in R$ 及 $v \in M_m$ 我們都有 $\|av\| = |a|\,\|v\|$，因爲測距 b 具有雙線性的緣故。

令 $f: [c, d] \to [a, b]$ 爲曲線 $\gamma: [a, b] \to M$ 的一個新的參數化函數，因此應有 $f' > 0$，而且曲線 $\tau = \gamma \circ f: [c, d] \to M$ 構成一個原曲線的新參數表示（reparametrization）。由連鎖法則有 $\tau_* = f' \cdot \gamma_* \circ f$，因此：

$$\begin{aligned} |\tau| &= \int_c^d \|\tau_* s\|\, ds \\ &= \int_c^d \|\gamma_*(fs)\|(f's)\, ds \\ &= \int_a^b \|\gamma_* t\|\, dt \\ &= |\gamma|. \end{aligned}$$

□

一條曲線 γ 的簡化弧長參數化表示（parametrization by reduced arc length）$\tau = \gamma \circ f$ 就是使得 $\|\tau_*\|$ 是常數而且使其定義域爲單位區間 $[0, 1]$。這種參數化表示要是存在的話其做法如下。假設 γ 是條定義於 $[a, b]$ 之上的平滑曲線而有 $|\gamma| = L$。我們定義這 γ 的簡化弧長函數 g 爲：

$$gt = \frac{1}{L}\int_a^t \|\gamma_* u\|\, du.$$

這個 g 的導數爲 $\|\gamma_*\|/L$ 總是個正數，因此 g 是嚴格遞增的函數（除非這曲線在什麼地方其速度向量 γ_* 爲零）。這就使得 g 是個嵌射，而有一個逆函數 $f: [0, 1] \to [a, b]$ 存在。這時 $\tau = \gamma \circ f$ 是 γ 的一個新參數化

表示，而且使得 τ 落在 $\tau 0$ 與 τh 之間這段曲線的弧長為 hL 。一般情況下這個 τ 只為連續曲線。但是如果假設 γ_* 全都不為零，則自然 τ 也為平滑的曲線。

黎曼流形 (M, b) 中任意兩點 m 與 n 之間的距離（distance）記為 $\rho(m, n)$ ，其定義就是所有從 m 到 n 點之參數化曲線之長度當中的最大下限（greatest lower bound）。因此按定義有：

(a) 對於任何一條從 m 到 n 點的曲線 γ 都有 $\rho(m, n) \leq |\gamma|$ 。

(b) 存在一些從 m 到 n 點而其長度任意接近甚或等於 $\rho(m, n)$ 的曲線。此即對於每個 $\varepsilon > 0$ ，存在一條曲線 γ 連接 m 到 n 而且滿足 $|\gamma| - \varepsilon < \rho(m, n)$。（如果 M 是不連通的，而且 m 與 n 分別落在不同的成分中，則沒有任何 M 中的曲線連接 m 與 n 點。這時不妨就定義 $\rho(m, n) = +\infty$ ）。

上面這個距離函數 ρ 滿足一些很好的性質：

(1) 正值性：$\rho(m, n) \geq 0$.

(2) 對稱性：$\rho(m, n) = \rho(n, m)$.

(3) 三角形不等式：$\rho(m, p) \leq \rho(m, n) + \rho(n, p)$

(4) 非退化性：倘若 $\rho(m, n) = 0$ 則必定 $m = n$ 。

因此按照第 0.8 節的定義就使得 (M, ρ) 成為一個（拓樸）賦距空間。上面的性質(1)，(2)及(3)證起來都非常容易。至於性質(4)的證明則需使用 b 的連續性，(4)在歐氏空間中已知能成立，以及 M 所具有的Hausdorff空間性質。我們只預備證明在歐氏空間裏，(4)這性質確實能夠成立（定理 5.4.1）。

一條從 m 到 n 點的曲線 γ 若滿足 $|\gamma| = \rho(m, n)$ 則說是一條最短的曲線。這種最短的曲線不見得只有一條。

如果現在回來考慮半黎曼流形，則上面所談的這些概念大部分的意義都會喪失掉。因此我們要引入一種新的觀念，就是考慮向量及曲線所具有的能量（energy）。任取 $v \in M_m$ 則定義其能量為 $\langle v, v \rangle$ 。至於一條曲線 γ 的能量則定義為：

$$E(\gamma) = \int \langle \gamma_* t, \gamma_* t \rangle \, dt.$$

而可以使用相對論中的術語來分別各種可能的能量。因此如果一個向量 v 的能量爲正，則說這向量是**時間類的**(time-like)，而若其能量爲零，則說這向量是**光類的**(light-like)或**零長的**(null)，最後若其能量爲負，則說這向量是**空間類的**(space-like)。如果曲線 γ 上所有切向量 $\gamma_* t$ 皆爲時間類，則說這曲線是條時間類的曲線。同樣若其切向量皆爲光類(皆爲空間類)，則說這曲線是光類的(是空間類的)曲線。在 m 點所有光類向量的集合構成切空間 M_m 中的一個**超光錐**(hypercone)，見第 2.21 節。

能量的概念不只在半黎曼流形上有用，也在黎曼流形上很有用處。而爲了統一全部的概念，我們有必要就黎曼流形的情形來考慮並建立能量與長度之間的關係，這關係式可以由積分的 Schwartz 不等式得來：

$$\left(\int_a^b (ft)(gt)\,dt\right)^2 \le \int_a^b (ft)^2\,dt \cdot \int_a^b (gt)^2\,dt.$$

其中 f 及 g 爲定義於 $[a, b]$ 之上的實值連續函數。在這不等式中其等號成立當且唯當 f 爲 g 的一個常數倍。考慮一條曲線 $\gamma : [a, b] \to M$，我們把 Schwartz 不等式應用於 $f = 1$ 及 $g = \|\gamma_*\|$ 的情形，立刻就得到：

$$|\gamma|^2 \le (b - a)E(\gamma). \tag{5.3.1}$$

這關係式中等號成立的充要條件是 g 爲一個常數，或即此曲線 γ 的參數能與弧長成比例。給定一條曲線，則在這曲線所有的參數化表示當中不存在任何一條是能具有最低能量的，因爲我們可以取 $b - a$ 爲任意大。可是如果我們固定參數的區間 $[a, b]$，則在這固定 $[a, b]$ 之上的所有參數表示之間確能存在一條使得其能量達到極小。特別我們可以得到能量與長度之間如下重要的關係：

定理 5.3.2 (a) 一條曲線若取其簡化弧長的參數化表示，則其能量等於其長度的平方。

(b) 考慮曲線 γ 定義於區間 $[0, 1]$ 之上的所有新參數化表示，則上述那條簡化弧長的參數化表示具有最低的能量。

(c) 從 m 到 n 存在一條最短的曲線之充要條件如下：考慮所有從 m 到 n 的曲線其參數化的區間皆爲 $[0,1]$，則在所有這些曲線當中存在一條具有最小的能量。

證明 由 (5.3.1) 式取 $[a,b]$ 爲 $[0,1]$ 則立即能得出(a)及(b)兩項性質。至於(c)之證明，我們假設 γ 是從 m 到 n 的最短的曲線，同時假設 γ 是表爲簡化弧長的參數化表示。則對於任意從 m 到 n 而以 $[0,1]$ 爲其參數化區間的曲線 τ 而言，由 (5.3.1) 式及 $|\gamma|$ 爲極小的性質可得：

$$E(\gamma) = |\gamma|^2 \leq |\tau|^2 \leq E(\tau).$$

因此在所有這些曲線當中，γ 的能量爲最小。

反過來假設在所有從 m 到 n 而以 $[0,1]$ 爲其參數化區間的曲線當中，γ 具有最低的能量。任取隨便一條上述的曲線 τ，而令 τ' 表示 τ 以簡化弧長來做的新參數表示，則有：

$$|\gamma|^2 = E(\gamma) \leq E(\tau') = |\tau'|^2 = |\tau|^2,$$

可見在所有這些曲線當中 γ 之長度爲最短。□

註：(a) 我們若想在一個黎曼流形上講論其最短曲線的理論，我們其實只需考慮所有以 $[0,1]$ 爲其參數化區間的曲線之最低能量曲線。由於能量這概念也適用於半黎曼流形，所以我們常喜歡考慮最低能量而不考慮更具直觀幾何意義的最短長度。

(b) 如果在圓圈 S' 上給定黎曼測距，則當我們考慮隨便一組對頂點時，連接這兩點的最短曲線有兩條。在大域黎曼幾何中，這種最短曲線的非唯一性時常會發生。可是如果我們只限於考慮局部的黎曼幾何，則能證明從給定一點到充分接近的另外一點只可能有唯一的一條最短的曲線。

(c) 在一個黎曼流形中可能存在兩點 m 與 n 使得不存在任何一條從 m 到 n 的曲線是能具有最短的長度。就算這流形是連通的，我們仍然可以給出這種最短曲線不能存在的實例，請參考習題 5.4.1。

5.4 歐氏空間

在本節我們要證明藉著距離函數在 R^d 中所引進來的黎曼結構並不會違背通常我們所熟悉的直觀結構。另外也要證明這時連接 R^d 中兩點的最短曲線就是一條直線，正如我們所預期的。

令 u^i 爲 R^d 中的卡氏座標。在每一點 $m \in R^d$，$\partial/\partial u^i(m) = \partial_i(m)$ 就是 R^d_m 中的一組基。因此我們可以藉著指定其成分爲 R^d 上的實值函數來定義測距 b。而令 $b_{ij} = \delta_{ij}$。對於任意 $v = v^i\partial_i(m), w = w^i\partial_i(m) \in R^d_m$ 這測距就給出：

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{d} v^i w^i,$$

這正是 R^d_m 中通常無向積的公式。

這個測距 b 就稱爲 R^d 上的**標準平直測距**（standard flat metric），而 $E^d = (R^d, b)$ 就稱爲（通常的）歐氏 d 維空間。

R^d 中的一條平滑曲線可以藉著 d 個實值平滑函數來給出而可寫爲 $\gamma s = (f^1 s, \ldots, f^d s)$。由於 $f^i = u^i \circ \gamma$，這 γ 的速度向量場應爲 $\gamma_* = f^{i\prime} \cdot \partial_i \circ \gamma$。因此我們有：

$$\|\gamma_* s\| = \left(\sum_{i=1}^{d} (f^{i\prime} s)^2 \right)^{1/2},$$

至於 γ 的長度則可寫成：

$$|\gamma| = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{d} (f^{i\prime} s)^2 \right)^{1/2} ds.$$

這式子正是 E^d 中一條從 $m = \gamma a$ 到 $n = \gamma b$ 點的曲線 γ 之長度的古典表示式。

假設 γ 是從 $m = (m^1, \ldots, m^d)$ 到 $n = (n^1, \ldots, n^d)$ 的一條直線線段，可以將其參數表示寫成：

$$\begin{aligned}\gamma s &= m + sv\\ &= (m^1 + sv^1, \ldots, m^d + sv^d),\end{aligned}$$

其中 $0 \le s \le 1, v = n - m$。則對於每個指標 $i = 1, \cdots\cdots, d$ 導數 $f^{i\prime} = v^i$ 皆爲常數，因此 $|\gamma| = (\sum (v^i)^2)^{1/2}$ 。這正是從 m 到 n 點之距離的通常公式，由 ρ 之定義條件(a)我們也知道：

$$\rho(m, n) \le |\gamma| = \left(\sum (v^i)^2\right)^{1/2}.$$

下面的定理要證明 $\rho(m, n) = |\gamma|$ ，因此能符合 ρ 之定義條件(b)。證明的重點在於指出不存在從 m 到 n 的更短的曲線。這結果就表示這兒的 $\rho(m, n)$ 就是 E^d 中通常的距離函數。

定理 5.4.1 假設 γ 是 E^d 中從 m 到 n 點的直線線段，而 τ 爲從 m 到 n 的任何一條其他的曲線，則必定 $|\tau| \ge |\gamma|$ ，其中等式成立當且唯當 τ 爲 γ 的一個新參數化表示。因此在 E^d 中連接兩點的最短曲線就是連接這兩點的直線線段。

證明 我們把 τ_* 分解成與 γ 垂直以及平行的兩部分。然後我們證明單只計算平行的部分之長度的積分，就已經至少有 $|\gamma|$ 的長度了。可見 τ 會比 γ 更長，倘若 τ 的垂直成分不在每點皆爲零，或者 τ 的平行成分沒有總是落在正確的方向。下面就開始這種構造。

γ 方向上的常數單位向量場爲 $X = \alpha^i \partial_i$ ，其中 $\alpha^i = v^i / |\gamma|$ 以及 $v^i = n^i - m^i$ 。所以 τ_* 的平行部分爲 $\langle \tau_*, X \circ \tau \rangle X \circ \tau$ ，其長度是 $g = \langle \tau_*, X \circ \tau \rangle$ ，因爲 $\|X\| = 1$ 。現在假設 θ 爲 X 與 τ_* 之間的夾角，則有：

$$\|\tau_*\| \cos\theta = \|\tau_*\| \, \|X\| \cos\theta = g \le \|\tau_*\|,$$

其中等號成立當且唯當 $\tau_* = gX \circ \tau$ 以及 $g \ge 0$ 。

令 $\tau s = (f^1 s, \ldots, f^d s), a \le s \le b$。則有 $\tau_* s = (f^{i\prime} s)\partial_i(\tau s)$ 以及 $gs = \sum \alpha^i f^{i\prime} s = \sum (\alpha^i f^i)' s$ 。再由 $\tau a = m$ 及 $\tau b = n$ 我們又有 $f^i a = m^i$ 及 $f^i b = n^i$ 。因此可得：

$$|\tau| = \int_a^b \|\tau_* s\| \, ds \geq \int_a^b gs \, ds = \sum \alpha^i (f^i b - f^i a)$$
$$= \sum \alpha^i v^i$$
$$= |\gamma|.$$

如果其中等式成立，那麼 $\tau_* = gX \circ \tau$ 以及 $g \geq 0$ 。這就使得：$f^{i\prime} s = \alpha^i gs$ ，所以 $f^i s = m^i + \alpha^i \int_a^s gt \, dt = m^i + \alpha^i hs$（這式定義了 hs ）。因此證明：

$$\tau s = \gamma \left(hs / | \gamma | \right)$$

或即 τ 應為 γ 的一個新參數化表示。□

習題 5.4.1 取 M 為從 R^2 中去掉從（−1，0）到（1，0）點的直線線段。取 M 上的測距就是通常的歐氏測距局限到 M 之上。這時 M 是個流形，而其中距離函數的定義域不含 [（−1，0），（1，0）] 這條封閉的線段。

(a) 試問在 M 中從點（0，1）到點（−1，−1）之距離為若干？在 M 中存在一條曲線眞的以此距離為其長度嗎？

(b) 在 M 中要怎麼樣配置的兩點其間的距離才完全等於這兩點在原來 E^2 中的距離？

5.5 變分及長方形

在前節已經證明 E^d 中兩點間最短的曲線就是一條直線線段。因此如果考慮一個單參數族的曲線 γ_t，其中每條曲線都具有相同的端點以及相同的定義區間，而且其中 γ_0 是一條直線線段，則 $E(\gamma_t)$ 於 $t=0$ 時應該具有一個極小。因此如果 $E(\gamma_t)$ 是關於 t 的一個可微分的函數，則其導數於 $t=0$ 時應等於零。直線的這一性質可以被拿來做為在一個賦距流形中一般的「直線」或測地線的定義。可是在下面我們對測地線所要給的定義比較接近於直線所具有的另一性質，就是直線是平直不彎曲的性質。一條直線不彎曲的意思可以講成其速度向量場是一個平行的向量場（參看第 5.12 節）。

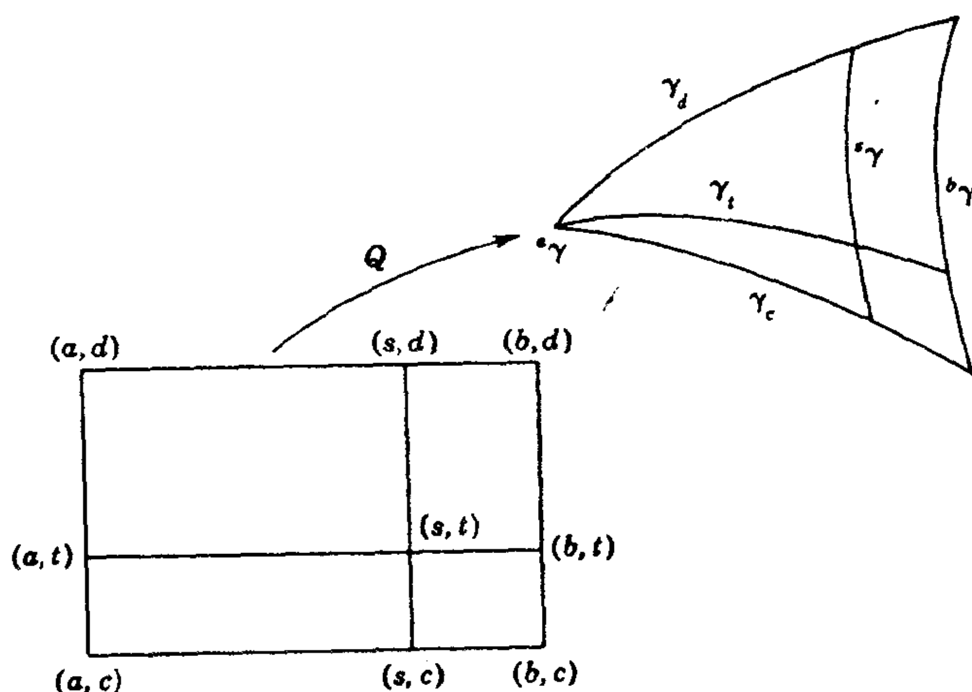


圖 19

我們這兒先來定義平滑的單參數曲線族的觀念，我們下面要稱呼這種平滑單參數曲線族為**平滑長方形**（rectangle）。

所謂一個平滑的長方形Q其意思就是一個把 R^2 中某一長方形映射到某一流形M的平滑映射。因此Q的定義域是個長方形$[a, b] \times [c, d]$，其中我們通常都取 $c = 0$。（見圖 19）

當我們固定 t 而變動 s 時所得到的曲線 $\gamma_t s = Q(s, t)$ 稱為這平滑長方形Q的緯線。特別曲線 γ_c 稱為Q的**底線**（base curve）。另外如果固定 s 而變動 t，則曲線 $^s\gamma t = Q(s, t)$ 稱為Q的**橫截線**（transverse curves），因此 $^a\gamma$ 及 $^b\gamma$ 分別為第一條及最末條橫截線。

對於Q之底線 γ_c 上的每一點我們可以指定通過該點之橫截線在該點的切向量，這就構成沿著 γ_c 的一個向量場V，稱為伴隨平滑長方形Q的向量場。因此嚴格來講，這V並不是一個向量場，而只是一個映射 $V : [a, b] \to TM$，而可以在符號上寫成 $V(s) = {}^s\gamma_* c$.

定理 5.5.1 假設γ是一條平滑的曲線，而V是一個沿著γ的向量場，而且在每一個座標系統中假設V的成分就γ的參數言皆為平滑的函數。則存

在一個以γ為其底線的平滑長方形Q，而且正好這個Q的伴隨向量場為V。

我們這兒不預備證明這定理。可是如果整條γ全都落在某一個座標系統之中的話，Q可以很容易就建造出來。而另方面由於γ具有緊緻性，所以在一般情況可以藉著有限個座標系統來籠罩住γ，然後把在每個座標系統中所構造出來的Q適當的拼湊起來就可以。當然這樣的Q並非唯一的。

有時候考慮片斷的（broken）平滑長方形會更加方便。這是R^2中一個長方形$[a, b] \times [c, d]$上的平滑函數，其中$[a, b]$被分裂成有限段$[a, s_1], [s_1, s_2], \ldots, [s_{k-1}, b]$，而且當我們把這映射限制到每一個子長方形$[s_{h-1}, s_h] \times [c, d]$之時皆為平滑長方形。這兒當然$s_0 = a$，$s_k = b$，又$h = 1, \ldots\ldots, k$。這個片斷的平滑長方形的伴隨向量場就稱為沿著底線$\gamma_c$的一個片斷的平滑向量場。

如果對於每個t來講，Q的第一條及最末條橫截線皆為常數曲線，${}^a\gamma t = m$及${}^b\gamma t = n$，則這個Q就稱為是從m到n的曲線當中的一個變分（variation）。如果我們的興趣是在比較底線跟其他那些從m到n的曲線，則Q也可以稱為γ_c的一個變分。這時都有$V(a) = 0$及$V(b) = 0$。反過來，如果V是一個沿著曲線γ的向量場，滿足$V(a) = 0$以及$V(b) = 0$，則存在γ的一個變分，而且其伴隨的向量場就是這個V。我們可以稱呼這種V為γ的一個**無窮小變分**（infinitesimal variation）。

在一個黎曼流形M中一條（片斷）平滑的曲線γ如果滿足對於每個變分（其中$\gamma = \gamma_0$）全都有$d|\gamma_t|/dt(0) = 0$，則說這曲線是**長度臨界的**（length-critical）。如果對於γ的每一個變分（其中$\gamma = \gamma_0$）而言，當$t = 0$時$|\gamma_t|$都為極小，則說這γ是**長度極小的**（length-minimizing）。如果把上面兩個定義中所用的長度$|\gamma_t|$全都改換為能量$E(\gamma_t)$，那麼我們就得出γ為**能量臨界**（energy-critical）以及**能量極小**（energy-minimizing）的定義。

注意這兒所定義的長度極小與能量極小概念只限於考慮在γ之附近的一些曲線，而就所有這些曲線當中衡量γ的長度或能量是否為極小。因此這概念就跟第5.3節所定義的最短長度或最小能量概念不同，因為那兒是就全部連接γ的兩個端點之曲線來考慮的，因此是一種大域的最小的概念

，因此有可能某一條曲線具有長度極小的性質，但是卻不是最短的曲線。因爲有可能另外存在一條曲線通過別種路徑（例如通過這拓樸空間中另外一個「洞」）而能使得其長度更短。可是另方面顯然一條最短的曲線就一定是條長度極小的曲線，而一條能量最小的曲線也一定是條能量極小的曲線，因爲在絕對極小處函數 t 的導數必定爲零。

由於曲線的長度 $|\gamma_t|$ 與這曲線的參數化之選法無關，因此上面長度臨界或者長度極小的概念可以看成一條曲線被看成一些點的集合時的性質，而不是被看成一條參數化曲線時的性質。可是在另外方面如果我們換成考慮能量，則這時曲線的參數化選法就變得十分重要。因此一條能量臨界曲線的參數化表示具有其特別的意義。就非光類的曲線而言（例如考慮黎曼流形上的任何曲線），一條能量臨界的曲線之參數化表示一定必須是能與其弧長成比例的才有可能。如果我們考慮光類的能量臨界曲線，則其參數化表示也是一些能正好適合測距的某些特別參數化表示才可。

一條長度（或能量）極小的曲線自然也是一條長度（或能量）臨界的曲線，可是反過來卻不見得。例如我們在 E^3 的球面上考慮一個大圓之上超過半圈的曲線，不妨以簡化弧長做爲其參數化表示。在這兩端點之間鄰近原來大圓曲線存在另外的曲線其長度會變得較短，因此原來曲線並非長度極小，但是卻爲長度臨界的。等到第 5.13 節我們將證明就黎曼流形的情形而言，一條能量臨界的曲線一定也是長度臨界的。因此把長度換成能量來考慮並不至於讓我們損失什麼，反過來其很大的好處在於讓我們可以同時考慮半黎曼流形的情形，也同時可以考慮那種在某些點其速度向量爲零的曲線。

5.6 平直空間

一個半黎曼流形 (M, b) 上的座標系統若在其中測距 b 之所有成分皆爲常數，則就稱爲是個仿射的（affine）座標系統。如果在 M 中每點都能存在一個仿射座標系統，則這個 M 就稱爲**平直的**（flat）半黎曼流形。在後面會證明這個定義條件等價於要求某個稱爲曲率張量的東西在各處皆爲零。平直空間的實例像歐氏空間與敏氏空間等皆是。

定理 5.6.1 在一個平直空間裏那些能量臨界的曲線就是那種在任何仿射座標系統中對應於直線的曲線。

證明 我們先來給出一條曲線 γ 是能量臨界的一種解析性的條件。由於這 γ 的像域為緊緻，我們可以使用有限個仿射座標系統就能將這曲線完全遮蓋。因此我們不妨假設 γ 的定義域 $[a, b]$ 可以被細分成有限點 $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$，使得在 γ 之下每一段 $[a_{\alpha-1}, a_\alpha]$，$\alpha = 1, \ldots, n$ 都被映射進某一個仿射座標系統之中。

現在我們就集中注意於這樣的區間 $[a_{\alpha-1}, a_\alpha]$ 之上。使用仿射座標 x^i 我們可以把 γ 的一個變分 Q 表示成一組 d 個具有雙變數 s 與 t 的函數 $f^i = x^i \circ Q$，其中 $a_{\alpha-1} \le s \le a_\alpha$，而 t 落在 0 的一個鄰域之中。按假設 x^i 為仿射座標，因此測距 b 可以表示成 $b = b_{ij}\, dx^i\, dx^j$，其中係數 b_{ij} 為一些常數，而且構成一個非奇異的對稱方陣。這時緯線 γ_t 的速度向量場為 $\gamma_{t*} = f^i_s \partial_i \circ \gamma_t$，其中 $f^i_s = \partial f^i/\partial s$，因此 γ_t 的能量是 n 個如下形狀之積分的和：

$$E_\alpha(t) = \int_{a_{\alpha-1}}^{a_\alpha} b_{ij} f^i_s f^j_s(s, t)\, ds.$$

因此 $\gamma = \gamma_0$ 為能量臨界的條件可寫為 $\sum_\alpha E'_\alpha(0) = 0$。當我們計算 $E'_\alpha(0)$ 時，對於 t 之微分可以容許在積分號之下進行：

$$E'_\alpha(0) = 2\int_{a_{\alpha-1}}^{a_\alpha} b_{ij} f^i_s f^j_{st}(s, 0)\, ds, \tag{5.6.1}$$

其中附於函數 f^j 的下標 s，t 當然表示偏導數。藉著部分積分而令 $u = f^i_s$ 及 $dv = f^j_{ts}\, ds$ 可得：

$$\begin{aligned} E'_\alpha(0) &= 2b_{ij}[f^i_s f^j_t(a_\alpha, 0) - f^i_s f^j_t(a_{\alpha-1}, 0)] \\ &\qquad - 2\int_{a_{\alpha-1}}^{a_\alpha} b_{ij} f^i_{ss} f^j_t(s, 0)\, ds \\ &= 2[\langle \gamma_*(a_\alpha), V(a_\alpha)\rangle - \langle \gamma_*(a_{\alpha-1}), V(a_{\alpha-1})\rangle] \\ &\qquad - 2\int_{a_{\alpha-1}}^{a_\alpha} \langle A_\gamma(s), V(s)\rangle\, ds, \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

其中 V 是伴隨變分 Q 的向量場而 $A_\alpha = f^i_{ss}(\cdot, 0)\partial_i \circ \gamma$ 是 γ 的加速度向量場（acceleration）。（通常加速度既然表爲座標成分的第二次導數，因此一般來講並不是一種不變量。可是在一個平直空間當我們把注意限制到仿射座標之時，這個加速度就是一個（仿射）不變量。在下面的證明中我們並沒有用到這事實，但是這性質是可以直接證明的，參閱習題 5.6.1 及 5.6.2）。

當我們把 (5.6.2)式逐項相加，則第一部分互相抵消而只剩下 $2[\langle\gamma_*(b), V(b)\rangle - \langle\gamma_*(a), V(a)\rangle]$。但是由於 Q 爲一個變分，$V(b) = 0$ 又 $V(a) = 0$，所以連這兩個剩下來的項也全都消失了。

因此 γ 爲能量臨界當且唯當下面這些積分的和：

$$E'(0) = -2\sum_\alpha \int_{a_{\alpha-1}}^{a_\alpha} \langle A_\alpha(s), V(s)\rangle\, ds$$

對每一個沿著 γ 滿足 $V(a) = 0$ 及 $V(b) = 0$ 之向量場 V 皆能爲零。我們把能量的導數表成這種樣式的優點在於其中所涉及的變分是以無窮小變分，或即向量場的姿態出現。而由這表達式我們立即能得出加速度向量場 A_α 必須恒等於零。因爲如果對於某個 α 及 c 我們有 $A_\alpha(c) \neq 0$，那麼我們可以先在 $\gamma(c)$ 點選一個向量 v 使得 $\langle A_\alpha(c), v\rangle \neq 0$，因爲 b 是不退化的。接下來可以把 v 延拓成一個沿著 γ 的平滑向量場 V_1，而由連續性來選出 $[a_{\alpha-1}, a_\alpha]$ 中的一個子區間 $[c_1, c_2]$ 能夠包含 c 點而且在其上都有 $\langle A_\alpha(s), V_1(s)\rangle \neq 0$。當我們使用一個構造於第 1.5 節實例(b)中的平滑函數 h 來乘以 V_1 時，我們就得到一個理想的無窮小變分 $V = hV_1$ 使得在 $E'(0)$ 的表示式中只剩下一個積分不爲零，因爲我們是選 h 在 $[c_1, c_2]$ 之外全都爲零。這時這個不爲零的積分當中的積分 $\langle A_\alpha, V\rangle = h\langle A_\alpha, V_1\rangle$ 不會改變符號。可是在這情況之下這積分不可能等於零，因此得出一個矛盾。

因此爲了要使 γ 爲能量臨界，我們必須要求加速度 A_α 恒等於零。但是這 A_α 的仿射座標成分爲 γ 之成分 $f^i(\cdot, 0) = x^i \circ \gamma$ 的第二次導數 $f^i_{ss}(\cdot, 0)$，因此可見一條能量臨界的曲線必定具有線性的仿射座標成分。此即存在常數 u^i 及 v^i 使得：

$$(x^i \circ \gamma)s = u^i s + v^i$$

就 γ 的每一點而言我們都有一個仿射座標系統包含這點，而已證明在這座標中 γ 是一條直線表如上面的形式。

反過來如果對於一組遮蓋 γ 的仿射座標系統中的每一個，假設 $x^i \circ \gamma$ 都是 s 的線性函數，則 A_α 恒等於零，因此能量的第一個變分 $E'(0)$ 就等於零。□

系 1 在一個平直空間裏一條能量臨界曲線 γ 的速度向量場具有常數的逐點能量，此即 $\langle \gamma_*, \gamma_* \rangle$ 是個常數。特別來講如果一條能量臨界曲線在某點爲空間類，則在所有點也皆爲空間類。同樣若在某點爲光類（或時間類），則在所有點也皆爲光類（或時間類）。最後如果是考慮平直的黎曼流形，則其中的能量臨界曲線之參數化一定是與其弧長成比例。

系 2 在平直黎曼空間中一條能量臨界曲線一定也是長度臨界的。

證明 假設 γ 爲能量臨界的。由系 1 在其定義區間 $[a, b]$ 之上其參數化與弧長成比例。現在假設 Q 是以 γ 爲其底線的任意平滑長方形，我們可以不變動 γ 而把所有緯線都重新參數化以使其與弧長成比例，這就得出一個新的長方形 Q_1。若以 t 來分別 Q_1 中的各個不同緯線 γ_t，我們就以 $L(t)$ 及 $E(t)$ 來代表其長度及能量。則由於 (5.3.1) 式中等式成立的條件能滿足，所以有 $L(t)^2 = (b - a)E(t)$。但是既然 γ 爲能量臨界而有 $E'(0) = 0$，可見必須 $2L(0)L'(0) = 0$。因此或者 $L(0) = 0$ 而 γ 爲常數曲線因此爲長度臨界，或者對於所有 Q 全都有 $L'(0) = 0$，而知 γ 是長度臨界的曲線。□

系 3 如果在平直空間裏的一條曲線是能量臨界的，則這條曲線的任何一段也都是能量臨界的。反過來，如果一條平滑曲線的每一局部段落都是能量臨界的，則整條曲線就是能量臨界的。

證明 在某座標系統中加速度向量場爲零是個純粹局部性的條件，因此本定理自然成立。□

註：儘管平直空間是些相當特別的流形，可是上面這定理 5.6.1，其證明的做法以及所有三個系全都可以輕易的推廣到半黎曼流形之上。關於這推廣目前唯一還缺少的就是如何把上面得到 (5.6.1) 式及 (5.6.2) 式的微分觀念推廣成爲對於向量場的一般的微分觀念。特別我們需要建立有關一條曲線之內在的加速度之概念。在接下去的三節裏我們就預備不使用測距而直接抽象的討論並建立起一套微分的觀念。然後到第 5.11 節才回來說明使用一個測距如何自然的引入一套微分觀念，而其所具有的性質是可以適合於進行定理 5.6.1之證明的推廣工作的。所有這些工作就使我們得出重要的結論，講到一條曲線是能量臨界的充要條件爲這曲線是條測地線 (geodesic) (定理 5.13.2)。

習題 5.6.1 假設 x^i 及 y^i 是測距 b 的兩組重疊的仿射座標系統，試證明對於所有 i，j，k 都有 $\partial^2 x^i/\partial y^j\,\partial y^k = 0$。因此在座標鄰域的交集的每一個連通成分之上 $a^i_j = \partial x^i/\partial y^j$ 全都是些常數。而使得在其上的座標轉換式爲 $x^i = a^i_j y^j + b^i$ ，其中 a^i_j 及 b^i 全是常數。換言之，這些座標變換全是仿射的變換。

提示：定義 $Y_i = \partial/\partial y^i$ 及 $Y_{ij} = [\partial^2 x^k/\partial y^j\,\partial y^i]\,\partial/\partial x^k$。證明：

$$Y_k\langle Y_i, Y_j\rangle = \langle Y_{ik}, Y_j\rangle + \langle Y_i, Y_{jk}\rangle = 0$$

因此數量 $T_{ijk} = \langle Y_i, Y_{jk}\rangle$ 對於 i 及 j 是反對稱的，但是對於 j，k 卻爲對稱的。這樣由習題 2.17.1 就知道 $T_{ijk} = 0$。再由於 Y_i 是一組基，可見 $Y_{jk} = 0$，而得證。

習題 5.6.2 試證 γ 的加速度向量場 A_α 與所用仿射座標系統的選法無關。因此我們不妨將下標 α 去掉。

習題 5.6.3 試證明系 2 之逆爲眞。此即證明一條長度臨界的曲線也必定

是能量臨界的。因此若使用仿射座標則其成分爲線性的函數。

沿著一條非光類能量臨界曲線 γ 的無窮小變分 V 可以分解成兩個成分 TV 與 $\perp V$，其中前者與 γ 相切而後者垂直於 γ。TV 這部分表示一種對 γ 重新加以參數化的傾向，但是卻不更動 γ 之像域。由切向變分所引起的能量變動可以透過 $E''(0)$ 來加以代表，其中 $E(t)$ 是一個伴隨於 TV 之長方形的緯線 γ_t 的能量。能證明這時 $E''(0)$ 之符號與 $<\gamma_*, \gamma_*>$ 之符號相同。可是如果換成考慮垂直方向的變分 $\perp V$ 而取其相伴隨的長方形，並計算其緯線之能量的第二次導數，則這種資料與 γ 附近的幾何具有密切的關係。因此對於這種垂直方向的變分之第二次能量導數人們下過功夫仔細研究，爲方便其敍述就把這種二次導數稱爲**第二法向變量**（second normal variations）。在勞倫茲流形上（因此在相對論中）能夠證明：所有時間類的測地線（通稱爲世線）其第二法向變量恒爲負值。因此對於法向的變分而言，這種世線會具有極大的能量。這方面的進一步研究我們不預備討論了，這兒只來提一下一種特別的情形而列爲一個習題。

習題 5.6.4 試證敏氏空間中時間類的直線線段就法向變分而言都是能量極大的。

5.7 仿射連繫

我們可以在流形上引入一種稱爲**順變微分**（covariant differentiation）的不變微分觀念。當一個流形上建立了這種順變微分的結構，則這流形就稱爲具有一個**仿射連繫**（affine connexion），或者說這流形已被仿射連繫起來。由一個半黎曼流形的結構我們可以自然的引進一個仿射連繫（第 5.11 節）。由某些特別的結構，像流形上的平行性結構我們也可以得到仿射連繫（習題 5.7.3）。另外由一組互相仿射關連的座標系統之圖表集我們照樣也能夠得出一個仿射連繫（習題 5.7.5）。有時候我們挑選一個仿射連繫來當做工具使用會十分方便。可是在一個流形上的仿射連繫並非只有單獨一個。

在歷史上仿射連繫是由一個黎曼空間之結構加以抽象化而來。而其命名的原因可能基於如下的想法，我們使用線性轉換來把鄰近的切空間連繫在一起，以便將不同切空間中向量的差值表示出來，然後取這差值之商並考慮其極限或導數。而在最早順變微分這運算就被看如對通常偏微分運算藉著加入修正項而做適當的更動以便得出一種在座標變換之下保持不變的微分運算，在這兒我們預備使用一套比通常做法更具一般性的公設講法來介紹仿射連繫。這樣的講法就使我們可以很方便的引進向量場沿著曲線進行順變微分的觀念。

假設 $\mu: N \to M$ 是從流形N到流形M的一個平滑映射。所謂在μ之上的一個向量場X就是指一個平滑映射$X: N \to TM$ 滿足對於每點$n \in N$都有$X(n) \in M_{\mu n}$。因此M中一個開子集E上的通常平滑向量場就可以看如一個在包含映射 $i: E \to M$ 之上的向量場。在大部分下面所要討論的事項中當我們把μ特別考慮爲恒等映射 $i: M \to M$ 則所得到的就是通常古典的敍述。

在一個映射 $\mu: N \to M$ 之上的向量場有兩種特別情形：

第一，把M上的一個向量場X局限於μ之上可以認爲就是$\mu: N \to M$與$X: M \to TM$的合成映射而記爲$X \circ \mu$。

第二，N上一個向量場Y在μ之下的影像可記爲$\mu_* Y$而定義爲$(\mu_* Y)(n) = \mu_*(Y(n))$.

因此可見N上的向量場Y以及M上的向量場X互相是μ相關的充要條件是$\mu_* Y = X \circ \mu$。

可以使用通常逐點定義的方式來定義兩個μ上的向量場之和，以及一個μ上的向量場與一個N上平滑函數的乘積。因此設X與Y爲μ上的向量場，而$f: N \to R$爲平滑函數，則定義 $(X+Y)(n) = X(n) + Y(n)$ 以及 $(fX)(n) = f(n)X(n)$.

假設$X_1, \cdots\cdots, X_d$是在某個座標鄰域$U \subset M$中的一組局部基，（例如可取X_i爲座標向量場∂_i），則對於μ上的每一個向量場Y以及每一個其$\mu n \in U$之點n我們都可以寫出：$Y(n) = f^i(n) X_i(\mu n)$。這就在$\mu^{-1}U$之上定義了d個實值函數f^i。容易看出這些f^i皆爲平滑函數，因爲若取$\{\omega^i\}$爲U上單形的一組對偶基，則有$f^i = \omega^i \circ Y$，可見他們就是平滑映射Y:

$N \to TM$與$\omega^t : TU \to R$的合成映射，因此應具平滑性。所以一個任意的μ上的向量場Y在局部上恒可表成：$Y = f^t X_t \circ \mu$。因此把M上向量場的一組局部基限制到μ之上就得出μ上向量場的一組局部基，其中所出現的各成分皆爲N上的實値平滑函數。從下面起當我們討論局部問題時我們都要藉著一組μ上向量場的局部基$\{X_t\}$來表達，可是我們並不假設這組基就是由原來M上的一組局部基按上法限制於μ而得來。但是應記得上述進行限制的做法是一種獲取μ上向量場之局部基的主要方法。

在$\mu : N \to M$上的一個**仿射連繫**(affine connexion)D就是一種法則能夠對每一個$t \in N_n$指定一個運算D_t，這運算把任意一個在μ之上的向量場映射成切空間$M_{\mu n}$中的一個元素而且滿足下列這些公設(這兒是考慮所有的$t, v \in N_n$，還有μ上任意的向量場X，Y，任意平滑函數f：$N \to R$，還有任意實數$a, b \in R$以及N上任意的向量場Z)：

(1) 關於t是線性的：$D_{at+bv}X = aD_tX + bD_vX$.

(2) D_t這運算就R是線性的：D_t: $D_t(aX + bY) = aD_tX + bD_tY$.

(3) D_t是一個**導運算**(derivation)：$D_t(fX) = (tf)X(n) + (fn)D_tX$.

(4) 平滑性：定義爲$(D_ZX)(n) = D_{Z(n)}X$的這個μ上的向量場D_ZX是個平滑的向量場。

我們把向量D_tX稱爲X對於t的**順變導數**。

M上的一個仿射連繫就定義爲在恒等映射$i : M \to M$之上的仿射連繫。

由於我們全都只考慮仿射連繫，所以我們以後就都將其簡稱爲連繫。

D_t這個順變導數運算具有局部性，其意義如下。如果X與Y都是μ上的向量場，而且在$n = \pi t$的某個鄰域U之上他們相等$X = Y$，則必定$D_tX = D_tY$。事實上只需取一個平滑函數f在U之外恒等於1，而在n點的一個更小的鄰域V之上恒等於零，則有$f \cdot (X - Y) = X - Y$，因爲在U上$X - Y = 0$。因此

$$\begin{aligned} D_tX - D_tY &= D_t(X - Y) \\ &= D_tf \cdot (X - Y) \\ &= (tf) \cdot (X - Y)(n) + (fn)D_t(X - Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此我們可以把一個連繫D局限到N的一個開子流形U之上而得出一個在U上的連繫：假設X是在$\mu|_U$之上的向量場而　$t\in U_n$　，則可以選一個n的較小的鄰域V，使得$X|_V$可以平滑的延拓成N上的向量場X'，然後定義$D_tX=D_tX'$　。由於D_t的局部性，上面取法顯然跟X'的選取無關。以後我們在書寫時就不再區分D以及這D到U上的限制。

現在假設$X_1,\cdots\cdots,X_d$是μ上向量場的一組局部基，而$Z_1,\cdots\cdots,Z_e$是N上向量場的一組局部基，全都定義在$U\subset N$之上，則我們定義連繫D對於局部基$\{X_i,Z_\alpha\}$的係數爲U上的d^2e個函數$\Gamma^i_{j\alpha}$滿足：

$$D_{Z_\alpha}X_j=\Gamma^i_{j\alpha}X_i.$$

如果Y是μ上的向量場而在局部上可表示成$Y=f^jX_j$，則對於任意$t=a^\alpha Z_\alpha(n)\in N_n,\ n\in U$　我們都有：

$$\begin{aligned}D_tY&=D_t(f^jX_j)\\&=(tf^i)X_i(n)+(f^jn)D_tX_j\\&=[a^\alpha Z_\alpha(n)f^i]X_i(n)+(f^jn)a^\alpha D_{Z_\alpha(n)}X_j\\&=a^\alpha[Z_\alpha(n)f^i+(f^jn)(\Gamma^i_{j\alpha}n)]X_i(n).\end{aligned}$$

這兒i，j是就$1,\cdots\cdots,d$取和，而α是就$1,\cdots\cdots,e$取和。這樣看出在局部上D可以藉著其平滑係數$\Gamma^i_{j\alpha}$完全加以決定。

對於$t\in N_n$我們也可以定義D_t的係數爲實數Γ^i_{jt}使得下式滿足：$D_tX_j=\Gamma^i_{jt}X_i(n)$　。因此有　$\Gamma^i_{jt}=a^\alpha\Gamma^i_{j\alpha}n$　以及$D_t(f^jX_j)=[tf^i+(f^jn)\Gamma^i_{jt}]X_i(n)$　。對於每點$n\in N$，映射$\omega^i_j:t\to\Gamma^i_{jt}$都可看如$N_n$上的一個實値線性映射$\omega^i_j:N_n\to R$，因此正是$N$上的一個單形。我們就把單形$\omega^i_j$稱爲對應於局部基$\{X_i\}$之連繫形。矩陣$(\omega^i_j(t))$就給出基$\{X_i\}$　對於向量t的變化率之測度。E. Cartan 特別喜歡使用這些連繫形。若把順變微分用連繫形加以表示則可重新寫成：

$$D_ZX=[Z\omega^i(X)+\omega^j(X)\omega^i_j(Z)]X_i$$

因爲$\omega^i(X)$就是X的成分。

習題 5.7.1 試求D之係數所滿足的變換律。此即假設 $Y_i = g_i^j X_j$ 及 $W_\alpha = h_\alpha^\beta Z_\beta$ 分別爲μ上向量場及N上向量場之新基，則決定D對於$\{X_i, Z_\alpha\}$之係數與D對於$\{Y_i, W_\alpha\}$之係數之間的關係式。特別當我們考慮M上之連繫，而且取$Z_i = X_i$及$W_i = Y_i$時，試證明係數Γ_{jk}^i並不構成某個張量的成分。

習題 5.7.2 假設N能夠被一些開子集U所遮蓋，而在每個開子集上有局部基$\{X_i, Z_\alpha\}$以及平滑函數$\Gamma_{j\alpha}^i$，而假設他們能夠在任何交集上滿足習題5.7.1中所給的轉換律。試證明存在一個連繫正好以這些函數爲其係數。

假設D是M上的一個連繫而$\mu: N \to M$是個平滑映射，假設X是M上的平滑向量場而$t \in N_n$，我們可以定義：

$$(\mu^* D)_t (X \circ \mu) = D_{\mu_* t} X. \tag{5.7.1}$$

由於並非所有μ上的向量場全都是這種限制向量場$X \circ \mu$，所以(5.7.1)式並不能完全定義μ上的一個連繫$\mu^* D$。可是儘管如此(5.7.1)式卻能唯一的決定μ上的一個連繫，就稱爲由D所誘引出來的在μ上的連繫$\mu^* D$。

定理 5.7.1 假設D是M上的連繫而$\mu: N \to M$爲平滑映射，則在μ上存在一個唯一的連繫$\mu^* D$使得對於M上每個向量場X以及每個$t \in N_n$我們都有$(\mu^* D)_t (X \circ \mu) = D_{\mu_* t} X$.

證明　唯一性：假設Y是μ上隨意一個向量場而假設$\{X_1, \ldots\ldots, X_d\}$是$U \subset M$上的一組局部基。則$Y = f^i X_i \circ \mu$，而對於$t \in N_n$我們必定有：$(\mu^* D)_t Y = (tf^i) X_i(\mu n) + (f^i n) D_{\mu_* t} X_i$。這就證明$\mu^* D$是唯一被決定的，同時我們也有這連繫的局部表示式。

存在性：我們必須證明對$(\mu^* D)_t Y$所給的公式是互相一致的。若設$\{Y_i\}$爲另外一組局部基，則有：

$$X_i = g_i^j Y_j \text{ 以及 } Y = f^i (g_i^j \circ \mu) Y_j \circ \mu.$$

因此 $(\mu^*D)_tY$ 的另外一個表示式應寫爲：

$$\begin{aligned} t[f^i(g_i^j\circ\mu)]Y_j(\mu n)+(f^in)(g_i^j\mu n)D_{\mu_*t}Y_j \\ &=(tf^i)(g_i^j\mu n)Y_j(\mu n)+(f^in)t(g_i^j\circ\mu)Y_j(\mu n)+(f^in)(g_i^j\mu n)D_{\mu_*t}Y_j \\ &=(tf^i)X_i(\mu n)+f^in[(\mu_*t)g_i^j\cdot Y_j(\mu n)+(g_i^j\mu n)D_{\mu_*t}Y_j] \\ &=(tf^i)X_i(\mu n)+(f^in)D_{\mu_*t}(g_i^jY_j) \\ &=(tf^i)X_i(\mu n)+(f^in)D_{\mu_*t}X_i. \end{aligned}$$

這表明對於 $(\mu^*D)_tY$ 的兩種決定法彼此相一致，而確實定義了一個連繫。

□

註：更一般來講，給定一個平滑映射 $\mu:P\to N$，我們可以從一個在 $\varphi:N\to M$ 之上的連繫 D 誘引出一個在 $\varphi\circ\mu:P\to M$ 之上的連繫 μ^*D 。其構造方法原則上與上面的做法完全類似，由定義性質(5.7.1)以及一個連繫所滿足的公設就能決定這個 μ^*D 。

如果 D 是在 $\mu:N\to M$ 之上的連繫而 $\gamma:(a,b)\to N$ 爲 N 中的一條曲線，則我們定義曲線 $\tau=\mu\circ\gamma$ 的加速度爲 $A_\gamma=(\gamma^*D)_{d/du}\tau_*$，就是速度向量 τ_* 的順變導數。

實例 假設 M 是個可平行化的流行而 $\{X_1,\cdots\cdots,X_d\}$ 構成 M 的一個平行化（參閱附錄 3 B）。我們定義平行化 $\{X_i\}$ 的連繫爲 M 上滿足如下性質的連繫。對任意 $t\in M_m$ 都有：

$$D_t(f^iX_i)=(tf^i)X_i(m),$$

因此這個 D 對於 $\{X_i\}$ 的係數恒等於零。

更一般來講，在 $\mu:N\to M$ 之上的向量場 $X_1,\cdots\cdots,X_d$ 稱爲 μ 的一個平行化，如果就每點 $n\in N$ 而言 $\{X_i(n)\}$ 皆構成 $M_{\mu n}$ 中的一組基。如果這樣的 X_i 存在，μ 就說是可平行化的。μ 的一個平行化 $\{X_i\}$ 的連繫 D 就定義爲：$D_t(f^iX_i)=(tf^i)X_i(n)$ ，其中 $t\in N_n$ 。

習題 5.7.3 假設 $\{X_i\}$ 是M上的一個平行化而 $\mu: N \to M$ 爲平滑映射，試證 $\{X_i \circ \mu\}$ 就是μ的一個平行化。此外如果D是 $\{X_i\}$ 的連繫，試證 $\mu^* D$就是 $\{X_i \circ \mu\}$ 的連繫。

習題 5.7.4 假設 $\{Y_i = g_i^j X_j\}$ 是 $\mu: N \to M$的另外一個平行化，試證這兩個平行化 $\{X_i\}$ 與 $\{Y_i\}$ 的連繫爲同一個連繫之充要條件是在N的每一連通成分上g_i^j 皆爲常數。

所謂一個流形M上的**仿射結構**(affine structure)就是一個圖表集滿足其中任何一個圖表都能與其他相交的圖表仿射相關，此即兩圖表間的賈氏方陣爲常數。一個流形上若選定某一個仿射結構，則這流形連同此結構合在一起就稱爲一個仿射流形。而所有與這仿射結構仿射相關的圖表就稱爲仿射圖表。在每一個仿射座標鄰域中其座標向量場就構成在該鄰域上頭的一個平行化。因此在這鄰域中就有一個這平行化的連繫。

習題 5.7.5 試證上面所談到的這種局部定義的對於仿射座標向量場之平行化的連繫在任何兩個仿射座標鄰域的交集上定義同一個連繫。因此對於一個仿射結構存在唯一的一個連繫跟其相對應。

習題 5.7.6 如果D是 $\mu: N \to M$ 上的連繫而 $\varphi: P \to N$ 是個平滑映射，又 $\tau: Q \to P$ 也是個平滑映射，試證 $\tau^*(\varphi^* D) = (\varphi \circ \tau)^* D$.

習題 5.7.7 假設 $\mu: N \to M$ 上之連繫D對於局部基 $\{X_i\}$ 之連繫形爲 ω_j^i，而 $\varphi: P \to N$ 是個平滑映射。試證 $\varphi^* D$對於 $\{X_i \circ \varphi\}$ 之連繫形應爲 $\varphi^* \omega_j^i$。

5.8 平行位移

令D爲 $\mu: N \to M$ 上的一個連繫。則μ上的一個向量場E若滿足對於每個 $t \in N_n$ 皆有：

$$D_t E = 0. \tag{5.8.1}$$

我們就說這向量場在點 $n \in N$ 是平行的。由於 D_t 對於 t 具有線性，因此條件 (5.8.1) 只需針對 N_n 中的一組基來講就夠了。如果 E 在每一點 $n \in N$ 皆爲平行，那麼 E 就叫做一個平行的向量場。

現在考慮 μ 上的一組局部基 $\{X_i\}$，而令 $\{Z_\alpha\}$ 爲 N 上的一組局部基，對於這些局部基假設 $\Gamma^i_{j\alpha}$ 爲 D 的係數。在局部上我們可以把 E 寫成 $E = g^i X_i$，其中 g^i 爲 N 上的一些平滑函數。在 (5.8.1) 式中以 Z_α 取代 t，我們可考慮 E 爲平行的局部性條件：

$$\begin{aligned} D_{Z_\alpha} E &= (Z_\alpha g^i) X_i + g^i D_{Z_\alpha} X_i, \\ &= (Z_\alpha g^i + g^j \Gamma^i_{j\alpha}) X_i, \end{aligned}$$

因此 E 爲平行的向量場當且唯當：

$$Z_\alpha g^i + g^j \Gamma^i_{j\alpha} = 0, \qquad i = 1, \ldots, d, \quad \alpha = 1, \ldots, e. \tag{5.8.2}$$

一般來講對於這組偏微分方程式系統不見得存在有任何解，因此一般而言平行向量場不見得存在。這方程組的可積分條件（此即能使得存在平行的局部基之條件）就是 D 的曲率張量必須等於零（參閱定理 5.10.3）。對於一個仿射流形上的自然連繫而言，由於我們可以選取仿射座標向量場 $\{\partial_i\}$ 來當做局部基，所以這個可積分條件能夠滿足。這使得所有 $\Gamma^i_{j\alpha} = 0$，因此在 (5.8.2) 式中任何常數都可當做 g^i 的解。

實例 將單位圓 $S^1 \subset R^2$ 看成一個一維的流形。在此流形上有一個標準的平行化向量場 X，就是反時鐘方向的單位向量場。設 θ 爲其角座標，則在局部上可以寫成 $X = d/d\theta$。在 S^1 上藉著指定 $D_X X = X$ 我們可以定義一個連繫 D（將 X 看爲基，則這連繫之係數爲 $\Gamma^1_{11} = 1$）。現在假設在此連繫之下 E 是 S^1 上的一個平行向量場，則存在 S^1 上的平滑函數 f 使得 $E = fX$。因此條件 $D_X E = 0$ 就給出 $Xf + f = 0$。而得局部上 $f = Ae^{-\theta}$，其中 A 是個常數。這樣的解就變數 θ 而言並不以 2π 爲其週期，可見這個連繫 D 不可能擁有大域的平行向量場。不過若從 S^1 中去掉任意一點，則在

所剩下的開子流形上就有一個大域平行向量場存在（請參閱習題5.8.4有關S^1上所有連繫之討論）。

定理 5.8.1 考慮$\mu:N\to M$上的一個連繫。

(a) 如果N是連通的，則一個平行向量場E可以由其在單獨一點之值所完全決定。

(b) 考慮所有平行向量場的集合P，這是個有限維的向量空間，其維數p滿足$p\leq d$，其中d是N的維數。

(c) 在任意一點$n\in N$考慮集合$P(n)=\{E(n)\mid E\in P\}$，則這集合是$M_{\mu n}$裏一個p維的子空間。

證明 (a) 固定$n_0\in N$而假設E是一個平行的向量場。則對於任意其他一點$n\in N$，存在一條從n_0到n的曲線γ。令$\gamma^*=f^\alpha Z_\alpha\circ\gamma$爲$\gamma_*$的局部表示式，而$E=g^iX_i$爲$E$的局部表示式。如果把（5.8.2）式限制到$\gamma$上之點，並乘以$f^\alpha$又關於$\alpha$取和，則立即得出：

$$\begin{aligned}0&=f^\alpha[Z_\alpha g^i+g^j\Gamma^i_{j\alpha}]\circ\gamma\\&=\frac{d}{du}(g^i\circ\gamma)+f^\alpha(\Gamma^i_{j\alpha}\circ\gamma)g^j\circ\gamma.\end{aligned}$$

這些方程式構成一組關於函數$g^i\circ\gamma$的一階常微分方程組，而且具有平滑的係數$f^\alpha\Gamma^i_{j\alpha}\circ\gamma$。因此對應於一組給定的始值條件$g^i(n_0)$（或即對於一個給定的值$E(n_0)$），存在一個獨一的解。因此已證明$E$沿著$\gamma$的值，特別$E$在$n$點的值單由$E$在$n_0$的值及$E$是平行向量場這條件所決定。

(b)及(c)，顯然（5.8.1）式的兩個解E_1及E_2之和仍然是一個解，此外某一個解的實數倍仍是一個解，因此全體平行向量場構成一個向量空間。另方面對任意點$n\in N$，把P弄到$P(n)\subset M_{\mu n}$的取值映射$\varepsilon(n)\colon E\to E(n)$顯然是線性的，而且由(a)是個嵌射。□

在上面這證明中我們看出取值映射$\varepsilon(n):P\to P(n)$是個從所有平行向量場之向量空間到他們在n點之值的向量空間之同構映射。任意考慮兩

點 $n_1, n_2 \in N$，而取合成映射：

$$\pi(n_1, n_2) = \varepsilon(n_2) \circ \varepsilon(n_1)^{-1}: P(n_1) \to P(n_2)$$

則這個映射就稱爲從 n_1 到 n_2 的**平行位移**（parallel translation）。由這定義顯然下列諸性質成立：

(a) $\pi(n, n)$ 爲 $P(n)$ 上的恒等映射。

(b) $\pi(n_1, n_2)$ 爲向量空間 $P(n_1)$ 到 $P(n_2)$ 之間的同構映射。

(c) $\pi(n_2, n_3) \circ \pi(n_1, n_2) = \pi(n_1, n_3)$.

(d) $\pi(n_1, n_2)^{-1} = \pi(n_2, n_1)$.

當我們考慮 R^d 上通常的仿射結構，就是單由卡氏座標系統所構成的圖表集，則這仿射連繫之下的平行位移正好就是 R^d 中向量的通常平行位移。此即在每點 n 都有 $P(n) = R^d_n$，而且若使用卡氏座標向量場 ∂_i 來表示，平行位移會保持其係數不變：

$$\pi(n_1, n_2)(a^i \partial_i(n_1)) = a^i \partial_i(n_2).$$

接下來要考慮的是在誘引連繫 $\varphi^* D$ 之下平行位移應該如何講。大體而言，平行位移可以在更少的點被應用到更多的向量之上，此即下面的：

定理 5.8.2 假設 S 爲 $\mu: N \to M$ 上之連繫 D 的平行向量場所構成的空間，而取 $\varphi: P \to N$ 爲平滑映射，又令 Q 爲誘引連繫 $\varphi^* D$ 之平行向量場所構成的空間。

(a) 如果 $E \in S$，則必定 $E \circ \varphi \in Q$。

(b) 對於每點 $p \in P$，$S(\varphi p)$ 都是 $Q(p)$ 的子空間。

(c) 如果 φ 是個可微同胚，則對於每點 $p \in P$，都有 $S(\varphi p) = Q(p)$。

證明 假設 $E \in S$。由 (5.7.1) 式，倘若 $t \in P_p$ 則由於 E 爲平行，所以有 $(\varphi^* D)_t (E \circ \varphi) = D_{\varphi_* t} E = 0$。因此知 $E \circ \varphi$ 爲平行而(a)項得證。而也使(b)變得顯然成立。

使用習題 5.7.6 之結果到 $\tau = \varphi^{-1}$ 之情形，則由(b)立即可以證明(c)。□

有一種極端情形就是對於某一個連繫我們可以考慮所有切向量的平行位移。這種特別好的連繫就稱為可平行化的連繫，因為這時M的一組基$\{E_i\}$就形成μ的一個平行化。除非當N為單連通的，不然這情形會比要求其滿足可積分性條件（曲率為零）來得更強。

有關連繫的許多性質都可以藉著將其限制到曲線時的性質來得出。因此下面這個定理既然指明沿著一條曲線上的連繫會特別簡單，這定理當使用於限制到曲線上之誘引連繫時就變得特別有用處。

定理 5.8.3 在一條曲線上的連繫總是可平行化的。

證明 假設D是在$\gamma:(a,b)\to M$ 之上的連繫。當我們使用γ上的局部基$\{X_i\}$，(a,b)上的基d/du，以及D的係數$\Gamma^i_j=\Gamma^i_{j1}$來表達一個平行向量場$E=g^iX_i$ 之方程式時，這些方程式就構成一組線性常微分方程式系統：

$$\frac{dg^i}{du}+g^j\Gamma^i_j=0.$$

因此選定一個起點$c\in(a,b)$，對於任給的一組始值條件$g^i(c)$（此即對於任意給定的向量$E(c)$）就存在定義於c之鄰域的一個解。使用通常黏補的方法我們就可以把這些局部解延拓到整個(a,b)之上。□

當我們對於$\mu:N\to M$上的連繫D以及其於一條曲線$\gamma:(a,b)\to N$上所誘引的連繫γ^*D而考慮平行位移之時，我們就說是關於D把向量沿著γ加以平行位移。因此沿著曲線γ的平行位移就對每兩點$c,d\in(a,b)$給出一個線性的同構映射：

$$\pi(\gamma;c,d):M_{\mu\gamma c}\to M_{\mu\gamma d}$$

γ^*D的一個平行化$\{E_i\}$就稱為是在D之下沿著γ的一組平行基向量場。顯然除非在D為可平行化的場合，不然沿著γ從γc到γd的平行位移不僅與γ有關，也同時跟端點有關。可是定理 5.8.2(c)卻又指出這種平行位移

倒是跟曲線γ的參數表示無關。特別，如果 $\tau=\gamma\circ f$ 是γ的一個新的參數化表示，則有 $\pi(\tau;c',d')=\pi(\gamma;fc',fd')$.

習題 5.8.1 對於 $\mu:N\to M$ 上的任意一個連繫D試證明在每一給定點$n\in N$，都存在一組μ上向量場的局部基$\{X_i\}$滿足每個 X_i 皆在n處為平行向量場。因此對於 $t\in N_n$ 以及任何在μ之上的向量場$X=f^iX_i$ ，都有 $D_tX=(tf^i)X_i(n)$.

習題 5.8.2 對於$\mu:N\to M$上的任意連繫D以及向量 $t\in N_n$ ，如果我們在N中選擇一條曲線γ滿足$\gamma_*(0)=t$ ，則我們可以按下法描述運算D_t。取$\{E_i\}$為沿著γ的一組平行基向量場。則對於μ上的隨便一個向量場X，我們可以把X沿著γ使用E_i來表達出來，此即$X\circ\gamma=f^iE_i$ ，其中f^i為實値函數，而以γ之參數為其變數。試證明 $D_tX=f^{i\prime}(0)E_i(0)$.

習題 5.8.3 假設X是 S^1 上的單位向量場，如上面實例中所討論。對於隨便一個給定的常數 c ，在S^1上定義一個連繫${}^cD$為滿足條件 ${}^cD_XX=cX$之連繫（在實例中之連繫為${}^1D$，使X為可平行化向量場之連繫為${}^0D$)。

(a) 試證除非 $c=0$ ，否則對於${}^cD$不存在任何大域的平行向量場。

(b) 試證${}^cD$這連繫伴隨著S^1上的一個仿射結構。

(c) 假設D是 S^1 上隨便的一個連繫，則必定存在一個常數c以及一個可微同胚$\mu:S^1\to S^1$滿足$D=\mu^{*c}D$。[提示：從一個向量被環繞 S^1 平行位移一圈後其「生長」的數量來決定c 。然後藉著考慮某些平行向量場之積分曲線上的對應點之配對來定義μ 。]

因此就可微同胚下之等價類這程度來講，我們可以對 S^1 上所有的連繫加以分類。如果容許可微同胚也可以逆轉方向，則我們可以進一步要求上面這些常數$c\geq 0$ 。

習題 5.8.4 根據一個平行向量場是否為：(1)完全的；(2)其積分曲線只能單在一個方向延伸到無窮大；(3)其積分曲線在兩個方向都沒辦法延伸到無窮大，這三種情形，試證明R上的一個連繫在可微同胚之下一定等價於R

上三個特別的連繫中的某一個。

5.9 張量場之順變微分

假設 $\mu : N \to M$ 爲平滑映射，可以比照 μ 上之向量場的定義方法來定義 μ 上之張量場爲一種映射，把一點 $n \in N$ 指定到切向量空間上的一個張量。如果 $\{X_i\}$ 是 μ 上向量場的一組局部基，則其對偶基 $\{\omega^i\}$ 就是 μ 上的一些單形，他們在 X_i 的定義域 U 中的每一點 n 都與 X_i 互相對偶。也即，對於每點 $n \in U$，ω^i 的值是個餘切向量，而且 $\{\omega^i(n)\}$ 這組 $M_{\mu n}^*$ 中的基對偶於 $M_{\mu n}$ 中的向量基 $\{X_i(n)\}$。然後我們可以考慮 X_i 與 ω^i 的各種張量乘積來得出 μ 上之張量的局部基，例如 μ 上一個屬於（1，1）型的張量場在局部上就可以寫成 $f_j^i X_i \otimes \omega^j$，其中的成分 f_j^i 都是些在 U 上的平滑函數。

現在假設 D 是 μ 上的一個連繫，而且對於 D 而言，$\{X_i\}$ 在 n 這點是平行的向量場。則我們定義對偶基 $\{\omega^i\}$ 也在這點爲平行的。這時我們可以把對於 μ 上之張量場的順變導數定義成習題 5.8.1 之結果的推廣：假設 $t \in N_n$，則 D_t 作用於張量場的方法就是讓 t 作用於這張量對於在 n 爲平行的基 $\{X_i\}$ 所寫成的成分。或即

$$D_t(f_j^i X_i \otimes \omega^j) = (tf_j^i) X_i(n) \otimes \omega^j(n).$$

當然必須證明假若在 n 點所用的平行基被更換了，則所得的運算 D_t 仍然是同一個，因此與基的選取無關。

另外一種定義 μ 上張量場的順變導數之方法就是推廣習題 5.8.2 中所述局限於一條曲線並使用沿著這條曲線之平行化的技巧。因此假設 $\{E_i\}$ 是沿著曲線 γ 的一組平行基，而 $\{\varepsilon^i\}$ 爲其對偶基。則對於任意在 μ 上的張量場 S，我們可以把其到這曲線之限制 $S \circ \gamma$ 寫成爲 E_i 及 ε^i 之張量乘積。倘若 $t = \gamma_*(0)$，則有：

$$D_t(f_j^i E_i \otimes \varepsilon^j) = f_j^{i\prime}(0) E_i(0) \otimes \varepsilon^j(0).$$

我們照樣能夠證明這樣的定義與曲線的選擇無關，也與所選用的不同組平

行基無關。事實上這定義與前一定義（在其中只用到一組在一點爲平行的基）其結果相同。我們要把這些細節的證明留著作爲習題。

習題 5.9.1 把恆等轉換看成一個張量場，則這是一個屬於（1，1）型的張量，而且其成分爲 δ^i_j。試證對於每一個連繫而言這張量場都是平行的。

下面這個定理給出幾個可以立即從張量場之順變導數的定義得出的性質。

定理 5.9.1 (a) 假設 S 及 T 爲 μ 上屬於同一類型的張量場，則必定：$D_t(S+T) = D_tS + D_tT$.

(b) 假設 f 爲 N 上的實値函數，則有：

$$D_t(fS) = (tf)S(n) + (fn)D_tS.$$

(c) 假設 S 及 T 爲 μ 上的張量場（其類型可以不同），則有：

$$D_t(S \otimes T) = D_tS \otimes T(n) + S(n) \otimes D_tT.$$

(d) 順變微分這運算與通常的收縮運算可以交換。若以 C 代表對於張量 S 加以收縮，則有：

$$C(D_tS) = D_t(CS).$$

(e) D_t 關於 t 爲線性，此即：

$$D_{at+bv} = aD_t + bD_v.$$

假設 Z 是 N 上的一個向量場而 S 是在 μ 上的一個張量場，則可以定義與 S 同一類型的 μ 上的張量場 D_ZS 如下：

$$(D_ZS)(n) = D_{Z(n)}S.$$

接下來我們要給出順變導數就局部基來考慮時的各種公式。由於我們

已有如下的符號（或即公式）：

$$D_t X_j,\ \Gamma^i_{jt} X_i = \omega^i_j(t) X_i,$$

我們現在只需再得出 $D_t \omega^i$ 之公式，然後應用定理 5.9.1 的各性質就可得出一般的公式。可是根據習題 5.9.1，$X_i \otimes \omega^i$ 是平行的，因此由(c)可知：

$$\begin{aligned} 0 &= D_t(X_i \otimes \omega^i) \\ &= \Gamma^i_{jt} X_i(n) \otimes \omega^j(n) + X_i(n) \otimes D_t \omega^i \\ &= X_i(n) \otimes [\Gamma^i_{jt}\omega^j(n) + D_t \omega^i]. \end{aligned}$$

由於 $X_i(n)$ 為線性無關，可見上面乘積的第二項應為零而有：

$$\begin{aligned} D_t \omega^i &= -\Gamma^i_{jt}\omega^j(n) \\ &= -\omega^i_j(t)\omega^j(n). \end{aligned}$$

特別如果選 t 為 N 上一組局部基 $\{Z_\alpha\}$ 中的基向量場則有：

$$D_{Z_\alpha}\omega^i = -\Gamma^i_{j\alpha}\omega^j.$$

實例 考慮一個（1，3）型的張量場，而令：

$$S = S^i_{jhk} X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^h \otimes \omega^k.$$

重複使用定理 5.9.1 中的結果可得：

$$\begin{aligned} D_{Z_\alpha} S &= (Z_\alpha S^i_{jhk}) X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^h \otimes \omega^k + S^i_{jhk}\Gamma^p_{i\alpha} X_p \otimes \omega^j \otimes \omega^h \otimes \omega^k \\ &\quad + S^i_{jhk} X_i \otimes (-\Gamma^j_{p\alpha}\omega^p) \otimes \omega^h \otimes \omega^k + S^i_{jhk} X_i \otimes \omega^j \otimes (-\Gamma^h_{p\alpha}\omega^p) \otimes \omega^k \\ &\quad + S^i_{jhk} X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^h \otimes (-\Gamma^k_{p\alpha}\omega^p) \\ &= (Z_\alpha S^i_{jhk} + S^p_{jhk}\Gamma^i_{p\alpha} - S^i_{phk}\Gamma^p_{j\alpha} - S^i_{jpk}\Gamma^p_{h\alpha} \\ &\quad - S^i_{jhp}\Gamma^p_{k\alpha}) X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^h \otimes \omega^k. \end{aligned}$$

其中的成分：

$$\begin{aligned} S^i_{jhk|\alpha} = Z_\alpha S^i_{jhk} &+ S^p_{jhk}\Gamma^i_{p\alpha} - S^i_{phk}\Gamma^p_{j\alpha} \\ &- S^i_{jpk}\Gamma^p_{h\alpha} - S^i_{jhp}\Gamma^p_{k\alpha} \end{aligned}$$

可以看成定義了在N上一個以張量爲值的單形。現在取$\{\zeta^\alpha\}$爲$\{Z_\alpha\}$的對偶基，而寫：

$$DS = D_{Z_\alpha} S \otimes \zeta^\alpha.$$

這時對於每點$n \in N$，DS可以看成是在N_n上的一個線性函數而其值落在$T^1_3 M_{\mu n}$中，而把$t \in N_n$指定到$D_t S \in T^1_3 M_{\mu n}$。我們就稱呼這個$DS$爲$S$的**順變微分形**（covariant differential）。

當D爲M上的一個連繫（此即$N = M$，而μ爲恆等映射時），我們可取：$Z_i = X_i, \zeta^i = \omega^i$。這時的順變微分形就變成一個張量其順變次數增加一。因此若S爲（1，3）型的張量場，則DS就是（1，4）型。看如一個多重線性的函數，我們可以對DS給出如下這種內在的公式：

$$DS(\tau, w, x, y, z) = D_z S(\tau, w, x, y),$$

其中$\tau \in M_m^*$而$w, x, y, z \in M_m$。

5.10 曲率張量及扭率張量

假設D是在$\mu : N \to M$之上的一個連繫。對於每兩個向量$x, y \in N_n$，我們可以指定一個切向量$T(x, y) \in M_{\mu n}$，稱爲扭率向量。仔細的定義給在下面：取X，Y分別爲把x，y延拓到N上的向量場，則取：

$$T(x, y) = D_x(\mu_* Y) - D_y(\mu_* X) - \mu_*[X, Y](n).$$

爲了證明上式確實定義了一個有意義的東西，我們當然就必須證明這定義式只與x及y有關，而跟其延拓X及Y之選擇無關。在證明這事的過程中，我們也順便把這個T的局部表達公式導引出來。取$\{X_i\}$爲μ上在n點的一組局部基，而$\{\omega^i\}$爲其對偶基。令ω^i_j爲這組局部基中的連繫形，因此對於任意$t \in N_n$，我們有$\omega^i_j(t) = \Gamma^i_{jt}$；此即：$D_t X_j = \omega^i_j(t) X_i(n)$這時對於隨便在$\mu$上的向量場$Z$都有$Z = \omega^i(Z) X_i$。令$Z$分別爲$\mu_* X, \mu_* Y$以及$\mu_*[X, Y]$就得出：

$$\begin{aligned} D_x(\mu_* Y) &= D_x(\omega^i(\mu_* Y)X_i) \\ &= (x\omega^i(\mu_* Y))X_i(n) + \omega^i(\mu_* y)D_x X_i \\ &= [x\omega^i(\mu_* Y) + \omega^j(\mu_* y)\omega^i_j(x)]X_i(n), \\ D_y(\mu_* X) &= [y\omega^i(\mu_* X) + \omega^j(\mu_* x)\omega^i_j(y)]X_i(n), \\ \mu_*[X, Y] &= \omega^i(\mu_*[X, Y])X_i. \end{aligned}$$

結合這三式得到：

$$\begin{aligned} T(x, y) = \{&x\omega^i(\mu_* Y) - y\omega^i(\mu_* X) - \omega^i(\mu_*[X, Y](n)) \\ &+ \omega^i_j(x)\omega^j(\mu_* y) - \omega^i_j(y)\omega^j(\mu_* x)\}X_i(n). \end{aligned} \qquad (5.10.1)$$

現在我們可以定義N上的單形 $\mu^*\omega^i$ 如下：

$$(\mu^*\omega^i)(z) = \omega^i(\mu_* z) \qquad z \in TN.$$

則由第 4.3 節(c)可知在 (5.10.1) 大括號中的前三項正好就等於 $2\,d\mu^*\omega^i(x, y)$。可見$T(x, y)$ 與延拓X與Y之選擇無關。在大括號中剩下的兩項可寫為：$2\omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j(x, y)$，因此我們已將$T$的公式化簡為

$$T(x, y) = 2(d\mu^*\omega^i + \omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j)(x, y)X_i(n).$$

這式中所出現的在N上的二微分形：

$$\Omega^i = 2(d\mu^*\omega^i + \omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j), \qquad (5.10.2)$$

通常稱為連聚D的扭率形，而用來定義這些扭率形的方程式 (5.10.2) 就稱為（卡當的）第一結構方程式。這樣我們可以把這個扭率張量看為一個向量值的二微分形而記為：

$$T = X_i \otimes \Omega^i. \qquad (5.10.3)$$

如果正巧所選的基向量場為$X_i = \partial_i \circ \mu$，其中$\partial_i$為$M$上的座標向量場，則知 $\omega^i = dx^i \circ \mu$ 及 $\mu^*\omega = \mu^* dx^i$。（其中μ^*的定義請見定理 3.9.4。在dx^i之後附加"$\circ$"的意思只表示把dx^i的領域限制到μN之上。當然這一限制已經被包含在 μ^* 的定義之中了）。由此可見：

$d\mu^*\omega^i = \mu^* d^2x^i = 0$ 。而（5.10.2）式 Ω^i 的公式變成：

$$\Omega^i = 2\omega^i_j \wedge \mu^* dx^j. \tag{5.10.4}$$

最後如果 μ 爲 M 上的恒等映射，則 T 成爲 M 上一個屬於（1，2）型的張量，而且關於其順變的變數爲反對稱。由於連繫形爲 $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k$ ，所以 T 的成分之局部表示式就給爲：

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}. \tag{5.10.5}$$

因爲由（5.10.3）式及（5.10.4）式立即得出：

$$\begin{aligned} T &= X_i \otimes 2(\Gamma^i_{jk}\, dx^k \wedge dx^j) \\ &= X_i \otimes (\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk})\, dx^j \wedge dx^k. \end{aligned}$$

一個其扭率張量爲零，$T = 0$ 的連繫稱爲是個對稱的連繫。這名稱的由來就是按（5.10.5）式這時 Γ^i_{jk} 對於兩個下標爲對稱。另一種講法是這時倘若 X 與 Y 爲 μ 上的兩個向量場滿足 $[X, Y] = 0$ ，則他們的順變導數具有如下的對稱性：

$$D_X\mu_* Y = D_Y\mu_* X.$$

習題 5.10.1 如果 D 是在 M 上的一個連繫，則可以定義其對偶連繫 D^* 如下：

$$D^*_X Y = D_X Y + T(X, Y), \tag{5.10.6}$$

其中 T 當然是指 D 的扭率張量。試證這個 D^* 確實也是 M 上的一個連繫，而且其扭率張量正好是 $-T$ 。

習題 5.10.2 假設 D 及 E 都是 $\mu: N \to M$ 上的連繫而 f 是 N 上的一個實值函數。試證 $fD + (1 - f)E$ 也是 μ 上的一個連繫。注意如果 $t \in N_n$ ，則：$(fD + [1 - f]E)_t = f(n)D_t + (1 - f(n))E_t$.］。我們稱呼 $fD + (1 - f)E$ 爲 D 及 E 之加權平均（weighted mean），而分別以 f 及 $1 - f$ 爲其載

重(weights)。

習題 5.10.3 如果D是M上的一個連繫，試證 ${}^sD = \frac{1}{2}(D + D^*)$ 是個對稱的連繫。請將這對稱連繫對於一組座標基之係數用D之係數來加以表達，這個 ${}^sD$ 就稱爲D的對稱化連繫(symmetrization)。

現在重新回來考慮 $\mu: N \to M$ 上的一個連繫D。對於每對 $x, y \in N_n$，我們可以定義一個線性轉換 $R(x, y): M_{\mu n} \to M_{\mu n}$，稱爲$D$對於$x$與$y$的曲率轉換。這種曲率轉換就測量出順變微分之不可交換性的大小程度。如上所述，取X與Y分別爲x，y的延拓，則定義：

$$R(x, y) = D_{[X,Y](n)} - D_x D_Y + D_y D_X.$$

此即，任取 $w \in M_{\mu n}$，而設W爲μ上滿足$W(n) = w$這條件的一個向量場，則：

$$R(x, y)w = D_{[X,Y](n)}W - D_x D_Y W + D_y D_X W. \tag{5.10.7}$$

如同對於扭率張量的做法，我們能證明這定義與延拓向量場X，Y及W之選取無關，而同時給出這個R表爲連繫形的表達公式。我們現在不預備像以前那樣在n點取値，但是R的張量特性仍然明顯可見。

順序把(5.10.7)式中之項寫出來我們有：

$$\begin{aligned}
D_{[X,Y]}W &= D_{[X,Y]}\{\omega^i(W)X_i\} \\
&= \{[X, Y]\omega^i(W) + \omega^j(W)\omega^i_j[X, Y]\}X_i, \\
D_X D_Y W &= D_X(\{Y\omega^i(W) + \omega^j(W)\omega^i_j(Y)\}X_i) \\
&= (X\{Y\omega^i(W) + \omega^j(W)\omega^i_j(Y)\})X_i \\
&\quad + \{Y\omega^k(W) + \omega^j(W)\omega^k_j(Y)\}\omega^i_k(X)X_i \\
&= \{XY\omega^i(W) + \omega^i_k(Y)X\omega^k(W) + \omega^j(W)X\omega^i_j(Y) \\
&\quad + \omega^i_k(X)Y\omega^k(W) + \omega^j(W)\omega^i_k(X)\omega^k_j(Y)\}X_i,
\end{aligned}$$

至於 $D_Y D_X W$ 則與 $D_X D_Y W$ 完全相同，只需在其中交換X與Y。當我們把這三項按照(5.10.7)式和起來時，那些被X或Y或被他們同時微分的項 $\omega^i(W)$ 正好彼此互相抵消。因此 $R(X, Y)W$對於W爲線性，而且只與逐

點之值有關。在式中全部只剩下：

$$\begin{aligned}R(X, Y)W &= \{\omega^i_j[X, Y] - X\omega^i_j(Y) + Y\omega^i_j(X) \\ &\quad - \omega^i_k(X)\omega^k_j(Y) + \omega^i_k(Y)\omega^k_j(X)\}\omega^j(W)X_i \\ &= 2\{-d\omega^i_j(X, Y) - \omega^i_k \wedge \omega^k_j(X, Y)\}\omega^j(W)X_i.\end{aligned}$$

在 N 上的二微分形：

$$\Omega^i_j = 2(d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) \tag{5.10.8}$$

就稱爲 D 的曲率形（curvature forms）。(5.10.8)式就叫做卡當的第二結構方程式。因此我們可以將曲率看成一個具有（1，1）型之張量值的二微分形而將其寫成：

$$R = -X_i \otimes \omega^j \otimes \Omega^i_j. \tag{5.10.9}$$

能夠證明 $R(x, y)$ 所測量的就是一個切向量 w，當其沿著一條落在切於 x 與 y 的二維曲面上的小封閉曲線 γ 平行位移一週而回到原出發點時，從 w 所發生的偏差。事實上若取第一次的逼近，則 w 沿 γ 平行位移一圈而回到出發點時所得的向量爲 $w + \alpha R(x, y)w$，其中 α 代表 γ 所包含之區域的面積與 x，y 所張開的平行四邊形之面積的比。

在特別的情形當 μ 爲恒等映射而 $X_i = \partial_i$ 時，只需在 (5.10.8)式中令 $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k$，稍經計算而代入 (5. 0.9) 式就可得出古典的關係式：

$$\begin{aligned}d\omega^i_j &= (\partial_h \Gamma^i_{jk})\, dx^h \wedge dx^k \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_h \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jh})\, dx^h \otimes dx^k, \\ \omega^i_p \wedge \omega^p_j &= \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{ph}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jh})\, dx^h \otimes dx^k.\end{aligned}$$

因此 R 的成分，看如 M 上一個 (1, 3) 型的張量，應爲：

$$R^i_{jhk} = \partial_k \Gamma^i_{jh} - \partial_h \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jh} - \Gamma^i_{ph}\Gamma^p_{jk}. \tag{5.10.10}$$

習題 5.10.4 對於 M 上的一個連繫，試直接由 (5.10.7) 式考慮 $R(\partial_h, \partial_k)\partial_j$ 之成分而得出 (5.10.10) 式來。

就M上的一個連繫而言，曲率張量(5.10.9)總是對於其最後那兩個變數爲反對稱。我們可以進一步追問，這張量對於他的後面三個變數是不是也爲反對稱。這問題的答案是否定的，因爲事實上若取D爲對稱的連繫($T=0$)，則R的反對稱部分爲零，此即我們有：

$$R(X, Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

或即：

$$R^i_{jhk} + R^i_{hkj} + R^i_{kjh} = 0. \tag{5.10.11}$$

習題 5.10.5 試證(5.10.11)式等價於R的反對稱部分等於零。

我們也可以把第一條Bianchi 恒等式推廣到在映射$\mu:N\to M$之上的一個對稱連繫之情形，首先我們把R的順變部分回拉到N上就得出一個向量值的在N上的(0,3)型的張量μ^*R，此即：

$$\mu^*R(X, Y, Z) = R(X, Y)\mu_*Z,$$

其中X,Y,Z爲N上的向量場。換言之，若用局部基寫出來有：

$$\mu^*R = -X_i \otimes \mu^*\omega^j \otimes \Omega^i_j.$$

對這張量施加反對稱運算$\mathscr{A}$，則得出其反對稱的部分。可是已知Ω^i_j是個反對稱的二微分形，所以有：

$$\mathscr{A}\mu^*R = -X_i \otimes \mu^*\omega^j \wedge \Omega^i_j.$$

關於這個反對稱部分我們有如下重要的：

定理 5.10.1 假若扭率張量爲零，則必定$\mu^*\omega^j \wedge \Omega^i_j = 0$，因此這時$\mathscr{A}\mu^*R = 0$

證明 如果扭率爲零，$\Omega^i = 0$，則由第一結構方程式：

$$d\mu^*\omega^i = -\omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j.$$

取這式的外導數而且使用第二結構方程式：

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \tfrac{1}{2}\Omega^i_j$$

代入右邊可得：

$$\begin{aligned} d^2\mu^*\omega^i &= 0 \\ &= -d\omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j + \omega^i_j \wedge d\mu^*\omega^j \\ &= \omega^i_k \wedge \omega^k_j \wedge \mu^*\omega^j - \tfrac{1}{2}\Omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j - \omega^i_j \wedge \omega^j_k \wedge \mu^*\omega^k \\ &= -\tfrac{1}{2}\Omega^i_j \wedge \mu^*\omega^j \\ &= -\tfrac{1}{2}\mu^*\omega^j \wedge \Omega^i_j. \end{aligned}$$

□

習題 5.10.6　在流形上一個連繫D的李奇張量 $R_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$ 是一個（0，2）型的張量，藉著對曲率張量按下法收縮而得：$R_{ij} = R^h_{ihj}$。特別若D為對稱的，試使用（5.10.11）式來證明：$R_{ij} - R_{ji} = R^h_{hij}$，可見$R$只有一種獨立的收縮運算。

習題 5.10.7　(a)　假設D是一個流形M上的對稱連繫。使用座標基∂_i（注意座標基在m點為平行的，因此$\Gamma^i_{jk}(m) = 0$，而在m點的順變導數等於對成分的通常導數），再加上（5.10.10）式來證明Bianchi 恒等式：

$$R^i_{jhk|p} + R^i_{jkp|h} + R^i_{jph|k} = 0.$$

(b)　試將對曲率張量R的順變微分形DR解釋成一個（0，3）型的張量，而其值為（1，1）型的張量。此即對所有x，y，$z \in M_m$，

$$DR(x,y,z) = (D_zR)(x,y)\colon M_m \to M_m$$

試證Bianchi 恒等式其實等價於「DR之反對稱部分應為零」。

習題 5.10.8　試證DR的所有可能的收縮都可以由$D(R_{ij}\,dx^i \otimes dx^j)$來得

出。其理由乃是基於Bianchi恒等式所能引出的如下結論：

$$R^h_{ijk|h} = R_{ik|j} - R_{ij|k}.$$

在我們從一個連繫誘引出另一個連繫的過程中，扭率張量與曲率張量也同樣被誘引過來而成爲這誘引連繫的扭率張量與曲率張量。詳細來講：若$\varphi : P \to N$是個平滑映射，而D爲在$\mu : N \to M$之上的連繫，又假設D之扭率張量及曲率張量分別記爲T及R。這時我們可以定義T與R到N上的**回拉**（pullbacks）爲：

$$\varphi^* T(X, Y) = T(\varphi_* X, \varphi_* Y),$$
$$\varphi^* R(X, Y) = R(\varphi_* X, \varphi_* Y).$$

因此$\varphi^* T$及$\varphi^* R$都是P上的張量值之二微分形，其值分別落在TM及$T^1_1 M$之中。

定理 5.10.2 誘引的連繫$\varphi^* D$之扭率張量與曲率張量分別爲$\varphi^* T$及$\varphi^* R$。

證明 由於誘引連繫之連繫形只不過是D之連繫形藉φ所得之回拉，我們立即可由結構方程式證明這定理。（參考習題5.7.7）。

系 一個對稱的連繫所誘引出來的連繫也是對稱的。

如果其$R = 0$則說這個連繫是平直的。如果一個連繫是局部可平行化的，那麼一定也是平直的。因爲倘若存在一組局部基由平行的向量場$\{E_i\}$所組成，則：

$$\begin{aligned} R(X, Y)E_i &= D_{[X,Y]}E_i - D_X D_Y E_i + D_Y D_X E_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

對於任意向量場X，Y皆成立。但是$\{E_i\}$是一組基，所以$R(X, Y) = 0$

。這性質之逆也爲眞，因此可以把 $R=0$ 當做是平行向量場之方程式的可積分條件。

定理 5.10.3 如果 $R=0$，則此連繫爲局部可平行化的。如果我們另外還要求N爲單連通，則這連繫是可平行化的。

證明 在點$n_0\in N$選取落在$U\subset N$中的一組座標系統 z^α，以 n_0 爲其原點。而且在$M_{\mu n_0}$中選一組基$\{e_i\}$。在座標 z^α 中考慮從n_0出發的射線（rays），而將$\{e_i\}$沿這些射線加以平行位移。這就在U上生成了一組局部基$\{E_i\}$。這兒所謂一條射線意指一條曲線 ρ 滿足 $z^\alpha\rho s=a^\alpha\cdot s$，其中 a^α 是一些常數。假設$Z_\alpha=\partial/\partial z^\alpha$，則這種射線的速度向量爲 $a^\alpha Z_\alpha\circ\rho$，因此所加給$E_i$的條件爲

$$a^\alpha D_{Z_\alpha}E_i(\varphi^{-1}(a^1s,\ldots,a^es))=0,$$

其中$\varphi=(z^1,\cdots\cdots,z^e)$代表座標映射。由上式可見$E_i$可看如具有$a^1$，……，$a^e$這些平滑參數的常微分方程式之解，因此他們都是平滑的向量場。（注意這些E_i在n_0點平行，而且上面這些做法與$R=0$之假設沒有任何關係。）

現在開始來使用$R=0$的假設以證明 E_i 在所有的方向皆爲平行，而不單只有徑向爲平行。假設 $t\in N_n, n\in U, z^\alpha n=a^\alpha$，而且取 $t=b^\alpha Z_\alpha(n)$，定義長方形τ以從n_0發出的射線爲其經線（longitudinal curves），其中以從 n_0 到n的射線爲基準線，同時最後的橫截線之切向量正好等於 t：

$$\tau(u,v)=\varphi^{-1}((a+bv)u),$$

其中 $a=(a^1,\ldots,a^e)$，$b=(b^1,\ldots,b^e)$。這時$\{E_i\circ\tau\}$構成$\mu\circ\tau$之上的向量場的一組局部基。把誘引連繫τ^*D對於$\{E_i\circ\tau\}$所寫出的連繫形記爲ω_j^i。由於τ的定義域是R^2中的一個開子集，因此具有一組局部基$X=\partial/\partial u$及$Y=\partial/\partial v$。沿著X的積分曲線 $E_i\circ\tau$這些向量場是平行的，因爲這些積分曲線對應於τ的經線，或即在N中由 n_0 而出的射線。因此有：

$$\tau^* D_X(E_i \circ \tau) = 0$$
$$= \omega_i^j(X) E_j \circ \tau,$$

但是由於 $\{E_i \circ \tau\}$ 是一組基，所以

$$\omega_i^j(X) = 0.$$

另方面曲線 $\tau(0, v) = n_0$ 爲常數，因此 $\tau_* Y(0, v) = 0$，而知：

$$\tau^* D_{Y(0,v)} E_i \circ \tau = 0$$

（請參看習題5.7.1(b)）。此即：$\omega_i^j(Y(0, v)) = 0$。按假設以及定理5.10.2 $\tau^* D$之曲率爲零，因此第二結構方程式化簡爲：

$$d\omega_i^j = -\omega_k^j \wedge \omega_i^k.$$

將此作用於 (X, Y) 可得：

$$X\omega_i^j(Y) - Y\omega_i^j(X) - \omega_i^j[X, Y] = -2\omega_k^j \wedge \omega_i^k(X, Y)$$
$$= 0 \qquad (5.10.12)$$

這兒因爲 $\omega_k^j(X) = \omega_i^k(X) = 0$ 尤有進者，$[X, Y] = 0$，因此(5.10.12)式變成：

$$X\omega_i^j(Y) = 0.$$

因此定義於線段 $[0, 1]$ 之上的函數 $f_i^j(u) = \omega_i^j(Y(v, 0))$ 滿足：

$$f_i^j(0) = 0 \text{ 以及 } f_i^{j\prime} = 0,$$

這就證明了 $f_i^j(1) = 0$。可是如此一來：

$$D_t E_i = D_{\tau_* Y(1,0)} E_i$$
$$= \tau^* D_{Y(1,0)} E_i \circ \tau$$
$$= \omega_i^j(Y(1, 0)) E_j(n)$$
$$= 0.$$

因此 E_i 在 n 點也是平行的。

如果N爲單連通，則對於任意點$n \in N$，選一條曲線滿足 $\gamma(0) = n_0$, $\gamma(1) = n$，而定義 $E_i(n) = \pi(\gamma; n_0, n)e_i$。只要我們能證明這個$E_i(n)$與曲線$\gamma$的選擇無關，則此向量場就在局部上與一個前面所定義的那種向量場相合，因此當然就是平滑的也是平行的。因此爲證明$\{E_i\}$確實是D的一個平行化，我們只需證明若σ爲另外一條從n_0到n的曲線，則有：

$$\pi(\sigma; 0, 1)e_i = \pi(\gamma; 0, 1)e_i$$

可是按假設N爲單連通，因此可以找到一個長方形τ來把γ連續的變形到σ，使得：$\tau(u, 0) = \gamma(u)$, $\tau(u, 1) = \sigma(u)$ 同時$\tau(0, \cdot)$以及$\tau(1, \cdot)$皆爲常數曲線。接下去的證明只是重複上面的做法，但是把X與Y的角色互換而已。細節就留做習題。□

習題 5.10.9　若將Möbius 帶 (Möbius strip) M看如R^2中的一個長方形而將其兩個對邊先扭轉 180 度後才黏合在一起。試證在這M上存在獨一的仿射結構滿足其中有一個仿射圖表是由 R^2 之卡氏座標限制到M中而得。請進一步證明這個仿射結構之連繫是平直的，可是卻無法加以平行化。

在本節的最末尾我們要給出一個定理說明一個連繫所具有的對稱性之好處何在。

定理 5.10.4　假設D是M上的一個對稱的連繫。又假設P是M上的一個切佈 (distribution)，這切佈假設是由一些平行的向量場所張開。則P一定是完全可積分的，而且可以接受一組座標向量場來做爲其平行基。

證明　令 $\{E_\alpha\}, \alpha = 1, \ldots, p$ 爲P的一組局部的平行基，則

$$\begin{aligned} T(E_\alpha, E_\beta) &= D_{E_\alpha}E_\beta - D_{E_\beta}E_\alpha - [E_\alpha, E_\beta] \\ &= -[E_\alpha, E_\beta] \\ &= 0. \end{aligned}$$

因爲按假設T應爲零。因此P必定爲完全可積分，而且 E_α 就是局部座標

向量場。□

系 流形M上的連繫D是個伴隨於某仿射結構的連繫之充要條件爲其T與R同時爲零。

5.11 一個半黎曼結構的連繫

把流形上的半黎曼結構推廣到在映射之上的半黎曼結構，其做法很直截了當，因此我們就不再花功夫加以定義了。我們主要的興趣是針對一個流形M上的半黎曼結構b。但是如果有映射$\mu:N\to M$，則可考慮在μ上的誘引半黎曼結構$b\circ\mu$，其中我們是把b看如M上一個（0，2）型的張量場。這個誘引的半黎曼結構常常很有用處。

在一個映射$\mu:N\to M$之上的連繫D稱爲能夠跟在μ上的測距$<,>$相匹配（compatible）如果：沿著N中曲線的平行位移能夠始終保持這內積不變。特別如果μ爲N中任意的曲線，而$x,y\in M_{\mu\gamma a}$，則：

$$\langle\pi(\gamma;a,b)x,\pi(\gamma;a,b)y\rangle=\langle x,y\rangle$$

對所有在γ之定義域裏的a，b都成立。因此$\pi(\gamma;a,b)$就把在$M_{\mu\gamma a}$的一組正交單元基映射到在$M_{\mu\gamma b}$中的一組正交單元基。因此沿著γ存在一組平行的基，他們在每一點皆爲正交單元的。下面就此給出幾個等價的條件：

定理 5.11.1 下列諸條件彼此等價：

(a) 連繫D與$<,>$彼此可匹配。

(b) 測距張量場$<,>$在D中是平行的。

(c) 對於所有在μ上的向量場X，Y以及所有的$t\in N_*$都有：

$$t\langle X,Y\rangle=\langle D_tX,Y\rangle+\langle X,D_tY\rangle. \tag{5.11.1}$$

(d) 沿著N中的每一條曲線都存在一組正交單元的平行基向量場。

(e) 對於每個平滑映射$\varphi:P\to N$，其誘引的連繫φ^*D都跟其誘引的

測距＜，＞$\circ\varphi$ 彼此可匹配。

證明　上面已經看出若(a)成立則(d)也成立。至於其逆爲眞之證明只不過是有關線性的簡易練習而已。現在繼續來證明下列諸項：

(d)→(b)，我們必須證明對於每個 t 都有 $D_t\langle\ ,\ \rangle=0$，其中假設沿著任意曲線存在有一組正交單元的平行基。選曲線 γ 滿足 $\gamma_*(0)=t$。令 $\{E_i\}$ 爲一組這種基而 $\{\varepsilon^i\}$ 爲其對偶基。則有：

$$\langle\ ,\ \rangle\circ\gamma=b_{ij}\varepsilon^i\otimes\varepsilon^j \quad \text{其中 } b_{ij}=1,-1 \text{ 或} 0$$

可見 b_{ij} 的所有導數均爲零。因此按照一個張量場之順變導數的第二個定義得知：$D_t\langle\ ,\ \rangle=0$.

(b)→(e)，一個被限制的張量場就其誘引連繫所求的順變導數滿足如下的一般公式：

$$(\varphi^*D)_tS\circ\varphi=D_{\varphi_*t}S.$$

這公式可以由 S 爲一個向量場之特別情形，藉選定一組基來加以證明。在目前的情形只需使用上公式而取 $S=\langle\ ,\ \rangle$ 就可。

(a)↔(e)，在(e)中考慮 φ 爲一條曲線 γ，則看到可匹配性的條件比(e)稍強，因此(a)爲(e)之特別情形。反過來，一條在 P 中的曲線 τ 可以被 φ 推到 N 中的一條曲線 $\gamma=\varphi\circ\tau$。假設(a)成立，則沿此 γ 的內積在平行位移之下保持不變。而且由於基本上我們考慮同一組向量，以及這組向量的平行位移及內積，所以沿著 τ 的內積也在平行位移之下保持不變。

(b)↔(c)，我們可以把取內積的運算 $(X,Y)\to\langle X,Y\rangle$ 看如一個收縮運算。根據定理 5.9.1，收縮運算與 D_t 可交換。因此 $D_t\langle\ ,\ \rangle$ 在 (X,Y) 之上的值爲：

$$(D_t\langle\ ,\ \rangle)(X,Y)=t\langle X,Y\rangle-\langle D_tX,Y\rangle-\langle X,D_tY\rangle.$$

由此(b)與(c)互相等價顯然可見。□

習題 5.11.1　就 $\mu:N\to M$ 上的測距＜，＞令 $\{F_i\}$ 爲一組局部的正交

單元基。令 $\langle F_i, F_i\rangle = a_i$（不取和），因此 $a_i = \pm 1$。試證 μ 上的一個連繫 D 是可匹配的充要條件為這個 D 對於這組正交單元基的連繫形滿足反伴隨（skew-adjointness）的性質：$\omega_i^j = -a_i a_j \omega_j^i$（不取和）。特別在黎曼（而非半黎曼）的情形這個方陣（ω_j^i）是反對稱的。

對於映射上的一個測距總是存在能與此測距相匹配的連繫。（這事實我們這兒不預備證明）。可是這種連繫不見得唯一。為了強迫只能存在唯一的一個這種連繫，我們就需適當加入額外的限制。當我們是考慮一個流形上的測距時，可以取限制條件為要求其扭率張量為零，這樣就產生可匹配之連繫的唯一性。因此對稱性的條件對於連繫帶來了解析上的簡易性，除此之外我們還可以給出幾何的理由來說明這對稱條件（$T=0$）的好處。假設 γ 是 M 上的一條曲線，把加速度 A_γ 用一組沿著 γ 為平行的基向量場來寫出來：$A_\gamma = f^i E_i$。則我們可以在 R^d 中找到一條曲線 τ，使得這 τ 在歐氏意義之下的加速度正好等於：

$$\tau'' = (f^1, \ldots, f^d).$$

現在如果 τ 是 R^d 中的一條封閉曲線，則可找到襯在 γ 裏與其相配合的曲面 S，使得扭率這二微分形在 S 上的積分正好約略等於從 γ 之起點到終點的位移。因此如果扭率為零這位移等於零，所以短曲線之行為可以比較容易與歐氏空間中的曲線相比較。

對於在一個映射 $\mu: N \to M$ 之上的測距這種一般的情形如果我們也想加進扭率為零的條件，則這條件就逐點的對連繫形（或係數）加給一些線性的代數條件。至於這系統之可解性則取決於在該點 μ_* 的階次。此即，若：

$$q = \dim(\mu_* N_n) = d = \dim M,$$

則其解為唯一。但是如果要求 $q = e = \dim N$，則知其解（在 n 點）存在。因此為同時有存在及唯一性 μ_* 必須是個嵌射又是蓋射，換言之，μ 就是一個局部的可微同胚。這樣看來限制於考慮 μ 為恒等映射之測距（即一個流形上的測距）對於考慮其扭率為零的連繫其實並不算是多大的限制。

定理 5.11.2 一個半黎曼流形具有單獨一個可與其測距相匹配的對稱連繫。

證明 將可匹配性條件寫成：

$$\langle D_X Y, Z\rangle = -\langle Y, D_X Z\rangle + X\langle Y, Z\rangle, \tag{5.11.1}$$

而將扭率爲零的條件表成：

$$D_X Y = D_Y X + [X, Y]. \tag{5.11.2}$$

交互的應用 (5.11.1) 式及 (5.11.2) 式於 X，Y，Z 之輪換排列。到最後一步時會再出現 $\langle D_X Y, Z\rangle$ 的項，因此就給出公式：

$$\begin{aligned}2\langle D_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle.\end{aligned} \tag{5.11.3}$$

這種對 $\langle D_X Y, Z\rangle$ 所得到的公式就明示了此對稱連繫的唯一性。爲簡便計我們把上式的右手邊記爲 $D(X, Y, Z)$。

要證明存在性我們可以進行如下一系列的觀察：

(a) 對於固定的 X 與 Y，上面式子所表達的 $D(X, Y, Z)$ 關於 Z 是個單微分形。當我們以 fZ 取代 Z，則 f 被微分之項互相消除而有 $D(X, Y, fZ) = fD(X, Y, Z)$。至於對 Z 的加法性當然也成立。因此存在一個向量場 W 使得對於每個 X，Y 都有：

$$2\langle W, Z\rangle = D(X, Y, Z)$$

換言之 (5.11.3) 式並沒有**超定**(overdetermine) $D_X Y$。

(b) 一個連繫的公設(1)，D_t 必須關於 t 爲線性，與(a)項類似。可以就固定的 Y 與 Z 證明 $D(X, Y, Z)$ 是關於 X 的單微分形而得。

(c) 公設(2)，D_t 必須爲一個 R 線性的運算，可以由 Y 的加法性以及下面要證明的公設(3)而得。

(d) 要證明公設(3)，只需以 fY 代替 Y，加以計算而將結果表示成：

$$D(X, fY, Z) = fD(X, Y, Z) + 2(Xf)\langle Y, Z\rangle.$$

(e) 顯然所考慮的公式從平滑的數據就產生平滑的結果，因此當然公設(4)能滿足。

(f) 要證明可匹配性只需驗證：

$$D(X, Y, Z) + D(X, Z, Y) = 2X\langle Y, Z\rangle.$$

(g) 要證明扭率爲零只需驗證：

$$D(X, Y, Z) - D(Y, X, Z) = 2\langle [X, Y], Z\rangle. \square$$

我們稱呼這個唯一的可匹配的對稱連繫爲半黎曼連繫，或者Levi-Civita 連繫，以紀念其發現者。

系 由M上之測距＜，＞在 $\mu: N \to M$ 上所誘引的半黎曼結構＜，＞。μ具有一個可匹配的對稱連繫。在任何點只要其 μ_* 爲蓋射，則這個連繫在此點之鄰域上是唯一的。

證明　若D爲M上的半黎曼連繫，則μ^*D就是一個可匹配的對稱連繫，因此存在性沒有問題。現在假設 μ_* 在 n 點爲蓋射，則可以找到在μ上的一組局部基是由$\mu_* Z_i$ 這些向量場所組成（其中的 Z_i 爲N上之向量場）。因此每一個在μ上的向量場一定都在這組基的鄰域中可表成一個N上向量場的影像。可是上面定理中導引（5.11.3）式的過程，當我們限制來考慮一些影像向量場時，都可以照樣執行出來，這就得出關於 $2\langle D_X\mu_* Y, \mu_* Z\rangle$ 的一個公式，其中X，Y及Z都是在n點之鄰域中的向量場。$\square$

我們可以考慮（5.11.3）式的特殊情形而得出D之係數的表達式。當我們使用座標基 $\{\partial_i\}$ 時就得到一些古典的結果。這時的函數：

$$\begin{aligned}\langle D_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle &= [ij, k] \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ik} - \partial_k b_{ij}),\end{aligned} \tag{5.11.4}$$

其中 b_{ij} 是測距< , >的成分，稱爲第一類的Christoffel 符號。至於第二類的Christoffel 符號則爲以前所定義的D的係數，Γ^{i}_{jk} 。在較早的文獻中也常記爲 $\{^{i}_{jk}\}$。他們可由提昇第一類符號 $[ij, k]$ 的指標k而得。因爲由：

$$D_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ji}\partial_k \text{ 可得 } [ij, k] = \Gamma^h_{ji}b_{hk},$$

所以若取 (b^{hk}) 爲 (b_{hk}) 的逆方陣，則有：

$$\begin{aligned}\Gamma^h_{ji} &= b^{hk}[ij, k] \\ &= \tfrac{1}{2}b^{hk}(\partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ik} - \partial_k b_{ij}),\end{aligned} \tag{5.11.5}$$

另外一種局部基的自然挑選法就是取一組正交單元基，（或者稱爲**支架**（frame）），$\{F_i\}$。使用這種基有些好處，譬如說，在一個可平行化的流形上考慮其黎曼結構之時，因爲這時可以將這種基大域化。若使用這種支架，而以X，Y及Z等等來表示這基中的向量場，則在（5.11.3）式中的前面那三項全都變爲零，因爲 $\langle F_i, F_j\rangle = a_i\delta_{ij}$ （不取和）爲常數之故。這時我們可以把D的係數用這支架的結構函數 c^i_{jk} 表示出來。這兒的所謂**結構函數**（structural functions）就是李乘積的係數：

$$[F_j, F_k] = c^i_{jk}F_i. \tag{5.11.6}$$

注意這兒有 $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$。把（5.11.6）式代入（5.11.3）式可得：

$$\begin{aligned}2\langle D_{F_i}F_j, F_k\rangle &= -a_i c^i_{jk} + a_j c^j_{ki} + a_k c^k_{ij} \\ &= 2a_k\Gamma^k_{ji} \qquad \text{（不取和）}\end{aligned}$$

這時不論要把指標下降，或者要解出 Γ^i_{jk} 都是很簡單的事，因爲 $(b_{ij}) = (a_i\delta_{ij})$ 本身就是自己的逆方陣。易得：

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2}a_i(a_i c^i_{kj} + a_j c^j_{ik} + a_k c^k_{ij}) \qquad \text{（不取和）} \tag{5.11.7}$$

定理 5.11.3 一個半黎曼流形上的曲率張量R滿足下列對稱的性質：

(a) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle$.

(b) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$.

(c) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

以及第一個 Bianchi 恒等式：

(d) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

（這定理使用張量成分的寫法請參閱習題 2.17.4 ，其中我們使用一些像 $A_{ijhk} = R_{ijhk} = b_{ip}R^p_{jhk}$ 之類的符號。另外在習題 2.17.4 中也給出這曲率張量進一步的另些代數性質 。）

證明：性質(a)及(d)已經在第 5.10 節中證明過了。

性質(b)則提到 $R(X, Y)$ 是個**反伴隨的**（skew-adjoint）線性轉換（對於測距＜，＞來講）。把一個線性轉換就支架 $\{F_i\}$ 寫成方陣 (A^i_j)，則這種反伴隨性就表示為 $A^j_i = -a_i a_j A^i_j$（不取和）。現在由（5.11.7）式我們立即看出連繫形的矩陣 $(\Gamma^i_{jk}\, dx^k) = (\omega^i_j)$ 會具有這種性質。但是 $R(\cdot, \cdot)$ 的矩陣是曲率形的矩陣加以變號，$(-\Omega^i_j)$，因此其反伴隨性就由 (ω^i_j) 的反伴隨性以及第二結構方程式：

$$\Omega^i_j = 2(d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j).$$

而得到證明。

至於關係(c)則由(a)，(b)及(d)歸納出來。事實上如果在下面的關係式中：

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(Y, Z)X, W\rangle + \langle R(Z, X)Y, W\rangle = 0$$

代入對於 (X, Y, Z, W) 不同順序的排列： $(X, W, Y, Z), (Z, W, X, Y)$ 及 (Y, W, Z, X) ，則我們得出另外三條類似的關係式。前面兩條的和減掉後面兩條的和就得出所想要的結果。□

習題 5.11.2 試求出半黎曼連繫之曲率的成分：

(a) 使用一組座標基 $\{\partial_i\}$，而且使用測距成分 $b_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ 來表示。

(b) 使用一個支架 $\{F_i\}$，而且使用結構函數 c^i_{jk} 來表示，其中 $[F_j, F_k] = c^i_{jk}F_i$.

習題 5.11.3 假設g是個在μ上的對稱雙線性形，而且對於μ上的連繫D爲平行的（在（5.11.1）式中以g替換$\langle\ ,\ \rangle$就是）。試證D的曲率轉換$R(X,Y)$對於g爲反伴隨的。

習題 5.11.4 一個映射$\mu: M\rightarrow M$稱爲是在測距$\langle\ ,\ \rangle$之下的**保距同構**（isometry）如果能滿足：$\mu^*\langle\ ,\ \rangle=\langle\ ,\ \rangle$。一個向量場$X$稱爲是測距$\langle\ ,\ \rangle$的一個Killing 向量場（或者稱爲無窮小保距同構）如果X之單參數群中的每個轉換μ_t都是M中在其定義域這開子集上的保距同構。試證明X爲Killing 向量場的充要條件爲$L_X\langle\ ,\ \rangle=0$，其中L_X是對於X的李導數運算。

習題 5.11.5 假設D是在M上測距$\langle\ ,\ \rangle$的半黎曼連繫，而定義$A_XY=-D_YX$。對於固定的X，我們可以把A_X看成一個（1，1）型的張量場，在每一點指定該點切空間之間的線性轉換。試將A_X延拓成一個定義在整個張量代數上的導運算。（參看習題3.6.8）。試證明：$A_X=L_X-D_X$（提示：對於張量代數的兩個導運算，例如A_X及L_X-D_X，如果作用於函數及向量場時能得到相同的結果，則這兩個導運算就彼此相等。）

習題 5.11.6 試證X爲Killing 向量場的充要條件爲對於測距$\langle\ ,\ \rangle$，A_X是反伴隨的。

習題 5.11.7 試證在X爲零之處$A_X=L_X$。

習題 5.11.8 令$\{F_i\}$爲M上的一個平行化，而定義M上的一個半黎曼測距$\langle\ ,\ \rangle$如下：(1)選定a_i，(2)使F_i成爲正交單元。則這平行化$\{F_i\}$的連繫D與此測距可匹配，但是這連繫一般而言卻不是半黎曼連繫，因爲D之扭率基本上透過c^i_{jk}給出。試問對這些c^i_{jk}必須加上什麼條件才能使其對稱化的連繫${}^sD$成爲半黎曼連繫？

習題 5.11.9 使用定理5.11.3中的對稱性(b)來證明$R^h_{hji}=0$，因此可

知一個半黎曼連繫的 Ricci 張量一定是對稱的，此即 $R_{ij}=R_{ji}$（請參看習題 5.10.6 ）。

習題 5.11.10 一個半黎曼連繫的無向量曲率 S 定義爲無向量的函數 $b^{ij}R_{ij}=R^i_i$ 。試證明：

$$R^j_{i|j}\,dx^i = \tfrac{1}{2}\,dS$$

（請參看習題 5.10.8 ）。

5.12 測地線

在歐氏空間 E^d 中，一條直線就是一條不彎曲的路徑。因此如果在這曲線 γ 中選定一個特別的參數化表示（線性的參數化），則沿此曲線 γ 其速度向量場爲平行的。我們就使用 E^d 中一條直線的這一特徵性質做爲動機來定義一個具有連繫 D 的流形 M 之上的測地線。

M 中的一條**測地線**（geodesic）就是一條參數化的曲線 γ 滿足其切向量場 γ_* 沿這 γ 爲平行。或即其加速度爲零：

$$A_\gamma = (\gamma^* D)_{d/du}\gamma_* = 0.$$

如果變動這曲線的參數化表示，則除非這參數變換爲仿射變換：$\tau(s)=\gamma(as+b)$，其中 a 與 b 爲常數，不然的話這條曲線就不再是條測地線．因爲任何其他的新參數化表示會在 γ_* 的方向給出某種的加速度。

一條測地線的方程式是個二階的微分方程式：

$$(\gamma^* D)_{d/du}\gamma_* = 0.$$

我們知道一條二階微分方程式的始值條件的給法是先指定一個起點 m ，在該點的參數值爲 0 ，然後又在這起點指定一個**初速度**（initial velocity） $\gamma_*(0)=v\in M_m$ 。這時對這微分方程式之定義函數的條件就足夠保證任給一組始值條件，則此方程式必定存在一個唯一的解。事實上，這唯一的解是其參數 u ，其起點 m ，以及其初速度 v 的平滑函數。

另外一種看法就是把速度看成爲是切束 TM 中的一條曲線 γ_*。能證明測地線的速度曲線應該是某一個 TM 上的特別的向量場 G 的積分曲線。這就使得上面所提有關測地線的特徵性質可以由以前所講有關積分曲線之性質得來。下面這定理就來講論這個 TM 上特別向量場 G 的內在性質：

定理 5.12.1 假設 D 爲 M 上的一個連繫，而 $\pi: TM \to M$ 爲自然投射把一個向量指定到其切點。又取 $I: TM \to TM$ 爲 TM 上的恒等映射，我們可以把這 I 看成是對任何一個向量指定到其切點然後又指定回原向量，因此可以將其看如一個在 π 之上的向量場。另外又設 π^*D 爲 D 透過 π 所誘引出來的連繫。則在 TM 上存在一個唯一的向量場 G 滿足：

(a) $\pi_* G = I$，記得我們有：$G: TM \to TTM$ 以及 $\pi_*: TTM \to TM$。

(b) $(\pi^* D)_G I = 0.$

此外，如果 τ 是這個 G 的一條積分曲線，則 $\gamma = \pi \circ \tau$ 就是 M 中的一條測地線，而且 $\tau = \gamma_*$。在 TM 中不存在任何其他的向量場滿足其積分曲線就是 M 上所有測地線的速度向量場。

證明 對於每個 $t \in TM$，在(a)及(b)項中的方程式對於 $G(t)$ 而言皆爲線性方程式，因此我們可以對這些式子逐點加以考慮而無損其一般性。就給定的 $t \in TM$（其中 $\pi t = m$），我們在(a)及(b)項中的映射分別變成：

$$\pi_*: (TM)_t \to M_m \text{以及} A_I = (\pi^* D)_{(\cdot)} I: (TM)_t \to M_m$$

因此只要取其直和就可以將這兩映射合併在一起而得：

$$\pi_* + A_I: (TM)_t \to M_m + M_m \quad (\text{直和})$$

注意這兒的運算 A_I 正好是習題 5.11.5 中那個運算加以變號而得。由於 $(TM)_t$ 及 $M_m + M_m$ 的維數相同，皆爲 $2d$，因此爲證明存在一個解，我們只需證明這解是唯一的。爲進行證明我們能得出唯一的解 G，我們就來將上面這問題改寫成座標的講法。

假設 x^i 爲 M 上的座標。則 TM 上的座標可以取爲：

$$y^i = x^i \circ \pi \quad 及 \quad y^{i+d} = dx^i.$$

令M上相應的座標向量場以及TM上相應的座標向量場分別為：

$$\partial/\partial x^i = X_i\ (M上)\text{，以及}\ \partial/\partial y^i = Y_i,\ \partial/\partial y^{i+d} = Y_{i+d}\ (TM上)$$

由於向量場X_i及Y_i為π相關，因此在π之上的向量場可以使用$X_i \circ \pi = \pi_* Y_i$做為一組方便的基。對於任意$t \in M_m$，可以將其寫成：

$$t = (tx^i)X_i(m) = y^{i+d}(t)X_i(\pi t),$$

因此恒等映射I之座標表示為：

$$I = y^{i+d}X_i \circ \pi.$$

如果連繫D之係數記為Γ^i_{jk}，則誘引連繫π^*D對於基$\{X_i \circ \pi, Y_\alpha\}$之係數為：

$$H^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \circ \pi \text{ 以及 } H^i_{jk+d} = 0,$$

因為$\pi_* Y_{i+d} = 0$。現在假設$G = G^i Y_i + G^{i+d} Y_{i+d}$，則由(a)知：

$$\begin{aligned}\pi_* G &= G^i \pi_* Y_i + G^{i+d} \pi_* Y_{i+d} \\ &= G^i X_i \circ \pi \\ &= I \\ &= y^{i+d} X_i \circ \pi,\end{aligned}$$

可見必須$G^i = y^{i+d}$。另方面由(b)能得出：

$$\begin{aligned}(\pi^* D)_G I &= (\pi^* D)_G y^{i+d} X_i \circ \pi \\ &= (G y^{i+d}) X_i \circ \pi + y^{j+d} G^\alpha (\pi^* D)_{Y_\alpha} X_j \circ \pi \\ &= (G^{i+d} + y^{j+d} y^{k+d} \Gamma^i_{jk} \circ \pi) X_i \circ \pi \\ &= 0,\end{aligned}$$

由這式我們可以解出G^{i+d}，而得到唯一的解為：

$$G = y^{i+d}Y_i - y^{j+d}y^{k+d}\Gamma^i_{jk} \circ \pi Y_{i+d}. \tag{5.12.1}$$

現在假設τ是G的一條積分曲線，而且取$\gamma = \pi \circ \tau$。則由(a)知道：$\gamma_* = \pi_*\tau_* = \pi_*(G \circ \tau) = I \circ \tau = \tau$，因此對於在$\gamma = \pi \circ \tau$之上的誘引連繫而言，我們由(b)可得：

$$\begin{aligned}(\gamma^* D)_{d/du}\gamma_* &= (\gamma^* D)_{d/du} I \circ \tau \\ &= \tau^*(\pi^* D)_{d/du} I \circ \tau \\ &= (\pi^* D)_{\tau_*} I \\ &= (\pi^* D)_G I \circ \tau \\ &= 0\end{aligned}$$

因此γ就是一條測地線。

由於任何向量場可由其積分曲線全體來唯一的決定，因此定理中最末那段敍述當然成立。□

上面證明中的一小部分就是下列有用的引理之證明：

引理 5.12.1 假設X是TM上的一個向量場，則：

(a′) X的積分曲線爲其至M上之投射的速度向量場的充要條件爲：

(a) $\pi_* X = I$。

註：(a) 一個在TM上的向量場若能滿足條件$\pi_* X = I$，則這樣的X稱爲是在M上的一個二階微分方程式。這種X的座標表示其形式爲：

$$X = y^{i+d}Y_i + F^i Y_{i+d},$$

假設γ是X之一條積分曲線γ_*之投射，則這γ的成分$f^i = x^i \circ \gamma$會滿足一個二階的微分方程式系統：

$$f^{i''} = {}^cF^i(f^1, \ldots, f^d, f^{1'}, \ldots, f^{d'}),$$

其中${}^cF^i$是R^{2d}上的函數，在座標映射（y^α）之下對應於係數函數F^i。

(b) TM 上的這個能給出連繫D的測地線之向量場G通常就稱爲D的**測地噴場**(geodesic spray)。對這個G而言，其成分：$F^i = G^{i+d}$ 正好是 y^{j+d} 的二次齊次函數。一個二階的在M上的微分方程式X若其成分F^i爲 y^{j+d} 的齊次二次函數，則這個X就稱爲是M上的一個**噴場**(spray)。因此對一個噴場我們必定有：

$$F^i = -y^{j+d}y^{k+d}\Gamma^i_{jk} \circ \pi,$$

其中$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ 爲M上的某些函數。根據W. Ambrose，I. Singer 及 R. Palais 的一個定理，這些函數Γ^i_{jk}正好構成M上某一個連繫D的係數。因此M上的每一個噴場一定都是某個連繫的測地噴場。

(c) 假設γ是一條測地線，而$f^i = x^i \circ \gamma$是其座標成分，則γ_*的座標成分可表爲：

$$y^i \circ \gamma_* = f^i \text{ 以及 } y^{i+d} \circ \gamma_* = f^{i\prime}.$$

由(5.12.1)式可以得出這些f^i及$f^{i\prime}$所滿足的方程式爲：

對於前面的d個，我們有：$f^{i\prime} = f^{i\prime}$；

對於其他的我們有：

$$f^{i\prime\prime} = -f^{j\prime}f^{k\prime}\Gamma^i_{jk} \circ \pi. \tag{5.12.2}$$

(5.12.2) 這個二次方程式是種標準式，可以輕易的由一條測地線的定義來導引出來。

定理 5.12.2 一個連繫可以由其扭率以及其參數化的測地線全體來加以完全決定。

證明 由扭率可以決定$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$，而由噴場$G$可以決定$\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}$。因此兩者合在一起可以完全決定這個連繫。□

習題 5.12.1 給定一個連繫D以及一個(1，2)型的張量場S而假設對於這張量場的兩個順變指標具有反對稱性。則存在唯一的連繫其測地線完

全與D的測地線相同，而其扭率張量正好等於這個給定的S。

習題 5.12.2 試證連繫D，其對偶連繫D^*，以及其對稱化連繫${}^sD$所具有的測地線完全相同。

習題 5.12.3 令x^1及x^2爲R^2中的卡氏座標。在這R^2上定義一個連繫D如下：取$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=1$，而含所有其他係數等於零，$\Gamma^i_{jk}=0$。則這連繫是對稱的。

(a) 試寫出這時R^2中測地線所滿足的微分方程式並解之。

(b) 試求滿足始值條件爲：

$$\gamma(0)=(2,1)\text{以及}\ \gamma_*(0)=\partial_1(2,1)+\partial_2(2,1).$$

之測地線γ。

(c) 從原點（0，0）出發一定能夠存在測地線通過R^2中的任意點麼?

習題 5.12.4 請處理與上習題完全同樣的問題，只不過將資料更換爲：$\Gamma^1_{11}=1$，而所有其他的$\Gamma^i_{jk}=0$。

習題 5.12.5 如果每一條測地線都可以無窮的延伸，此即對其參數的任意大值皆有定義，則說這個連繫是完全的（complete）。換言之，如果TM上的噴場G爲完全的，則說這連繫是完全的。試問習題 5.12.3 及 5.12.4 中的連繫是否爲完全的？

習題 5.12.6 試證M上一個平行化$\{X_i\}$之連繫的測地線正好就是線性組合向量場a^iX_i之積分曲線，其中a^i爲一些常數。

5.13 測地線的極小化性質

在本節裏我們要證明在一個黎曼流形中連接給定兩點其長度爲最短的曲線如果存在的話，那麼對於黎曼連繫而言，這是一條測地線。更一般來

講，在一個具有測距的流形裏，一條曲線若是**能量臨界的**（energy-critical），則這條曲線一定是條測地線。

首先來考慮局部的情況，我們要證明從一點到這點之某個足夠小的鄰域中的任意點一定存在一條測地線相連。這件事對於流形M中的任何一個連緊D都可以做。對於任何點$m\in M$，我們定義在該點的**指數映射**（exponential map）$\exp_m : M_m \to M$如下：對於任意$t\in M_m$存在唯一的一條測地線滿足$\gamma(0)=m$，及$\gamma_*(0)=t$。因此我們就使用這條測地線而定義：$\exp_m t=\gamma(1)$，如下面圖20所示：

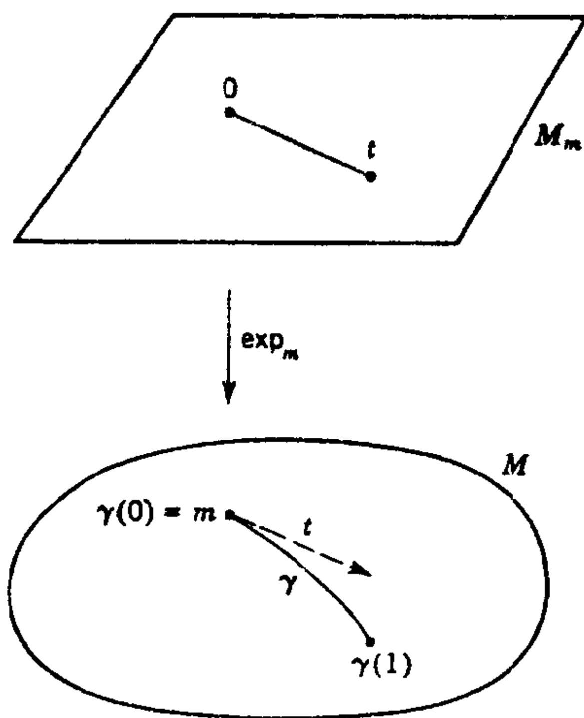


圖20

使用黎曼幾何的語言我們也可以講成我們就從m沿著在t這方向的測地線運動一個等於t之長度的距離。爲證明這指數映射$\exp_m$具有平滑性，我們的做法是考慮切束TM而使用噴場G之流線$\{\mu_t\}$。顯然按定義我們有：

$$\exp_m=\pi\circ\mu_1|_{M_m},$$

所以指數映射$\exp_m$被分解成自然投射$\pi : TM\to M$以及可微同胚$\mu_1|_{M_m}$。既然後兩者都是平滑的，所以指數映射爲平滑的。

若把上面的初速度改爲 αt ，則測地線變爲 $\tau(s)=\gamma(\alpha s)$ ，可見在 $\exp_m$ 之下，M_m中由原點出發的射線就被映射到由m點出發以 t 爲方向的測地線： $\exp_m \alpha t=\tau(1)=\gamma(\alpha)$.

在M_m 中選定一組基 $b=\{e_i\}$。我們可以使用這組基來給出一個可微同胚映射：

$$b: R^d \to M_m \ : \ b(x)=u^i(x)\cdot e_i.$$

因此合成映射 $\varphi=\exp_m \circ b$ 就把第 i 個正座標軸（可以將其看爲射線）映射成以 e_i 爲初速度的測地線 。或即：

$$\varphi_*(\partial/\partial u^i(0))=e_i,$$

這結果也顯明 φ_* 在原點 0 爲非奇異的，因此存在原點的某個鄰域，使得在這鄰域上 φ 是個可微同胚 。我們把逆映射 φ^{-1} 稱爲在m點的一個正則座標映射（normal coordinate map）。這樣所得到的正則座標其特徵就是在m點出發的測地線就對應於 R^d 中經原點 0 之線性參數化的座標射線 。既然一個在m點的座標映射應該是射到m之某一鄰域中的蓋射，所以我們已經證明了下面的：

定理 5.13.1 假設M中有一個連繫D而$m\in M$，則存在m點的一個鄰域U使得對於其中每一點$n\in U$存在U中的一條測地線由m出發而以n爲其終點。

習題 5.13.1 考慮一個對稱的連繫D，而設 x^i 爲在m點的正則座標。試證明這時座標基$\{\partial_i\}$在m點爲平行的，而且證明D對於這組座標基的所有係數在m點皆爲零 $\Gamma^i_{jk}(m)=0.$

習題 5.13.2 取 $M=C^*$ ，就是從複數平面中將 0 去掉，而可將M看如$R^2-\{0\}$，而具有卡氏座標x，y以及其座標向量場∂_1，∂_2 。取$X=x\partial_1+y\partial_2$以及$Y=-y\partial_1+x\partial_2$, 因此$\{X,Y\}$就構成$M$上的一個平行化 。而令$D$爲這平行化的連繫。試證這連繫$D$在$m=(1,0)$點的指數映射正

好等於複變指數函數。注意這兒我們把 M_m 藉下法看如複數平面：$\alpha\partial_1(m) + \beta\partial_2(m) \leftrightarrow \alpha + i\beta$ ，因此所要求證明的其實就是：

$$\exp_m(\alpha\partial_1(m) + \beta\partial_2(m)) = e^{\alpha+i\beta}.$$

定理 5.13.2 在一個其測距為＜，＞的半黎曼流形M中考慮一條曲線 γ。則 γ 為測地線的充要條件為它是能量臨界的。

證明 本定理的證法完全與定理 5.6.1 之證法類似，只不過把以前的仿射加速度換成為對現在的半黎曼連繫之加速度而已。

設 γ 為定義於 $[a, b] \times [c, d]$ 之上的變分Q 之底線，而其沿經線及橫緯線的向量場分別記為：$X = Q_*\partial_1$ 以及 $Y = Q_*\partial_2$ 。這時沿著經線的能量函數可表為：

$$E(v) = \int_a^b \langle X(u, v), X(u, v)\rangle\, du.$$

為求得$E'(c)$我們可以先在積分號裏面直接對 v 微分同時運用零扭率之條件而有：

$$\begin{aligned}\partial_2\langle X, X\rangle &= 2\langle Q^* D_{\partial_2} X, X\rangle. \\ &= 2\langle Q^* D_{\partial_1} Y, X\rangle.\end{aligned}$$

可是：

$$\partial_1\langle Y, X\rangle = \langle Q^* D_{\partial_1} Y, X\rangle + \langle Y, Q^* D_{\partial_1} X\rangle,$$

而有：

$$\partial_2\langle X, X\rangle = 2\partial_1\langle Y, X\rangle - 2\langle Y, Q^* D_{\partial_1} X\rangle.$$

$2\partial_1\langle Y, X\rangle$ 這項可以使用微積分的基本定理加以積分而得到：

$$2\langle Y, X\rangle \Big|_{(a,c)}^{(b,c)} = 0,$$

因為Q既然是個變分，所以當然必須$Y(a, c) = 0$以及$Y(b, c) = 0$。因此全部剩下的就只是涉及加速度的項：

$$A_\gamma(u) = (Q^* D_{\partial_1} X)(u, c)$$

以及一個無窮小的變分$Y(\cdot, c)$而有：

$$E'(c) = -2\int_a^b \langle Y(u, c), A_\gamma(u)\rangle\, du.$$

接下去的證明就完全跟以前仿射的情形之證法相同。只需證明如果有某點 A_γ 不為零，那我們就可以適當的選到一個$Y(\cdot, c)$ 使得上式中所算得的$E'(c)$不為零。反過來如果$A_\gamma = 0$ ，此即 γ 是一條測地線，則對於所有的$Y(\cdot, c)$都有$E'(c) = 0$ ，因此這 γ 應該是能量臨界的。□

因此在一個黎曼流形中兩點之間的最短曲線（如果存在的話）顯然一定是一條測地線。另外在一個足夠小的鄰域中，從正則座標系統之原點出發的所有測地線線段皆為連接原點跟另一端點的最短曲線，這事實之證明請讀者自行做為習題。

在進一步的研究工作中常常假設測地線是完全的，這種額外的幾何假設常是相當合理的，也能帶來重要的性質。但是在特別的模型中最好要先查核一下這條假設是否正確（請看習題5.12.5）。在黎曼流形中（但是在半黎曼流形中不對）測地線的完全性會帶來如下的結論：對於流形M之同一成分中的任意兩點m，n，一定存在從m到n的最短曲線。另外Hopf與Rinow 的一個有名的定理說到一個黎曼流形的測地完全性其實等價於其距離函數的測距完全性（此即每一個Cauchy 序列一定會收斂）。所以特別一個緊緻的黎曼流形是完全的。

5.14 截面曲率

在流形M之一點m的一個**二維截面**（plane section）P就是在該點之切向量空間M_m中的一個二維的子空間。在一個半黎曼流形中所有從m出發而切於P的測地線就構成一個曲面$S(P)$，而這曲面上可以考慮一個由

M之半黎曼結構而來的半黎曼結構。例外的情形是P切於或被包含於落在m點的光錐中，這時所承繼過來的結構是退化的，所以我們下面就將這種退化情形除外而不考慮。仔細研究這些曲面$S(P)$的幾何性質能夠幫助我們瞭解M的結構。關於曲面幾何我們所知道的主要不變量就是高斯曲率(gaussian curvature)。E^3中的一個具有正值高斯曲率的曲面在局部上都是帽型的(cap-shaped)。住在這種帽型曲面上的居民察覺這性質的方法就是測量一個圓周的長度。他會發現半徑爲r之圓圈其周長小於$2\pi r$。反過來在E^3中如果一個曲面之高斯曲率爲負值，則這曲面爲鞍型，這時一個半徑爲r之圓圈其周長會大於$2\pi r$。譬如來考慮E^3中一個半徑爲c的球面之上若考慮一個其半徑等r的圓圈(圖 21)，則其周長等於：

$$
\begin{aligned}
L(r) &= 2\pi c \sin\frac{r}{c} \\
&= 2\pi r - \frac{2\pi r^3}{6c^2} + \cdots .
\end{aligned}
$$

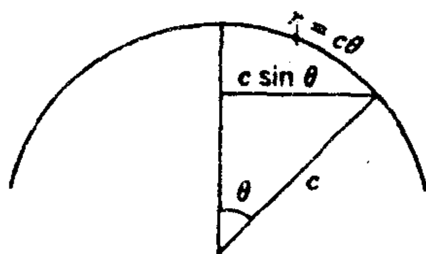


圖 21

這長度與歐氏情形的標準長度$2\pi r$之間相差大約爲$\pi r^3/3c^2$，就是高斯曲率$K=1/c^2$與$\pi r^3/3$的乘積。在許多的場合中我們可以顛倒過來藉著計算$L(r)$來有效的求得$S(P)$的高斯曲率，而定義二維截面P的截面曲率$K(P)$爲：

$$
K(P) = \lim_{r\to 0} \frac{3[2\pi r - L(r)]}{\pi r^3}. \tag{5.14.1}
$$

可是在半黎曼的情形我們不一定能用(5.14.1)式來定義$K(P)$，除非當

我們把 $\langle\ ,\ \rangle$ 限制到所考慮的二維曲面時所得到的是個(正定的)黎曼測距，或者是個負定的測距。因此這時的截面曲率只對空間類的或者時間類的截面有定義。

對於截面曲率的另外一種可能的描述法就是考慮圓盤的面積而非圓圈的周長，面積的公式可由積分而得：

$$A(r) = \pi r^2 - K\frac{\pi r^4}{12} + \cdots.$$

由這式子我們可以把截面曲率 K 表示出來。

接下來我們要由曲率張量來計算截面曲率。我們使用在中心點的正則座標並設法進一步認清這正則座標之本性。

令 x^i 為在 m 點的正則座標，而將 $b_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle$ 按泰勒級數展開到二次項以上：

$$b_{ij} = a_{ij} + b_{ijk}x^k + b_{ijhk}x^h x^k + \cdots,$$

其中 $b_{ijhk} = b_{ijkh}$，而當然 $a_{ij} = b_{ij}(m)$。由於從在 m 點的一個正則座標系統到另一個正則座標系統的變換是一種線性的變換，所以一個其對於 $\{\partial_i(m)\}$ 之成分為 b_{ijhk} 的張量應該是在測距結構之下的不變量。因此可以將其認為是在 M 上的一個張量場在 m 點之值。我們能夠將這張量場用曲率張量以及其順變微分表示出來，可是這兒我們採用別種做法。

由於 x^i 為正則座標，所以沿著徑線(radial lines) $x^i = a^i s$ 速度向量場 $a^i\partial_i$ 是平行的，因此特別其能量為常數 $a^i a^j a_{ij}$。但是：

$$\begin{aligned}\langle a^i\partial_i, a^j\partial_j\rangle\big|_{x^i=a^is} &= a^i a^j b_{ij}\big|_{x^i=a^is}\\ &= a^i a^j a_{ij} + b_{ijk}a^i a^j a^k s + b_{ijhk}a^i a^j a^h a^k s^2 + \cdots\\ &= a^i a^j a_{ij},\end{aligned}$$

其中最後項也是在 $s = 0$ 時之值。因此結論出 s 之每一冪次的係數全要等於零，而有：

$$\begin{aligned} b_{ijk}a^i a^j a^k &= 0,\\ b_{ijhk}a^i a^j a^h a^k &= 0,\end{aligned}$$

等等。因此以 b_{ijk} 或 b_{ijhk} 等等爲成分的張量其對稱的部分應該等於零。如果也使用前面已知的對稱性質我們可得：

$$b_{ijk}+b_{jki}+b_{kij}=0, \tag{5.14.2}$$

以及

$$b_{ijhk}+b_{ihjk}+b_{ikjh}+b_{jhik}+b_{hkij}+b_{jkih}=0. \tag{5.14.3}$$

由 (5.14.3) 式可得下面的結果在以後會被用到：

令 v^i 及 w^i 爲在 m 點兩個向量的成分，只需適當更換指標就得到：

$$\begin{aligned} b_{ijhk}v^iw^jv^hw^k &= b_{ikjh}v^iw^jv^hw^k \\ &= b_{hkij}v^iw^jv^hw^k \\ &= b_{jhik}v^iw^jv^hw^k. \end{aligned}$$

把上面關係式中的四個量全加起來而且使用 (5.14.3) 式就得：

$$\begin{aligned} A &= (b_{ihjk}+b_{jkih})v^iw^jv^hw^k \\ &= -2(b_{ijhk}+b_{hkij})v^iw^jv^hw^k \\ &= -2B, \end{aligned} \tag{5.14.4}$$

其中：

$$\begin{aligned} B &= (b_{ijhk}+b_{hkij})v^iw^jv^hw^k \\ &= (b_{ikjh}+b_{jhik})v^iw^jv^hw^k. \end{aligned} \tag{5.14.5}$$

由習題 5.13.1 已知半黎曼連繫之係數在 m 點全等於零。因此由 (5.11.4) 式在 m 點取值可得：

$$\begin{aligned} a_{hk}\Gamma^h_{ji}(m) &= \tfrac{1}{2}(\partial_i b_{jk}+\partial_j b_{ik}-\partial_k b_{ij})(m) \\ &= \tfrac{1}{2}(b_{jki}+b_{ikj}-b_{ijk}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.14.6}$$

結合 (5.14.5)、(5.14.2) 式以及 b_{ij} 的對稱性就證明了：

$$b_{ijk} = 0.$$

現在對於 ∂_p 來微分 (5.11.4) 式可得：

$$(\partial_p b_{hk})\Gamma^h_{ji} + b_{hk}\partial_p\Gamma^h_{ji} = \tfrac{1}{2}\partial_p(\partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ik} - \partial_k b_{ij})$$

在 m 點取值而記得 $(\partial_h\partial_k b_{ij})(m) = 2b_{ijhk}$ 我們就有：

$$a_{hk}(\partial_p\Gamma^h_{ji})(m) = b_{jkip} + b_{ikjp} - b_{ijkp}. \tag{5.14.7}$$

從 (5.14.7) 式以及有關曲率張量的座標公式 (5.10.10) 我們可以將曲率張量（將其逆變指標先行下降）在 m 點用 b_{ijhk} 表示出來：由於：

$$R^i{}_{jhk}(m) = (\partial_k\Gamma^i_{jh} - \partial_h\Gamma^i_{jk})(m),$$

所以：

$$\begin{aligned}
R_{ijhk}(m) &= a_{ip}R^p_{jhk}(m) \\
&= (a_{ip}\partial_k\Gamma^p_{jh} - a_{ir}\partial_h\Gamma^p_{jk})(m) \\
&= b_{jihk} + b_{hijk} - b_{hjik} - b_{jikh} - b_{kijh} + b_{kjih} \\
&= b_{ihjk} + b_{jkih} - b_{jhik} - b_{ikjh}.
\end{aligned} \tag{5.14.8}$$

現在假設 P 是個在 m 點的二維截面，而且在這 P 上的測距 $\langle\, ,\, \rangle$ 爲正定黎曼的或負定的 。取：

$$v = v^i\partial_i(m) \text{ 及 } w = w^i\partial_i(m)$$

爲 P 中的一組正交單元基，因此滿足 $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = \delta = \pm 1.$ 這時 P 中的所有單位向量可以表爲：

$$v\cos t + w\sin t,$$

至於 $S(P)$ 中半徑爲 r 的圓圈 γ_r 可用 t，$0 \leq t \leq 2\pi$ 來做爲其參數而具有座標：

$$x^i(\gamma_r t) = (v^i\cos t + w^i\sin t)r.$$

因此 γ_r 的速度向量場為：

$$\gamma_{r*}t = (-v^i \sin t + w^i \cos t) r \partial_i(\gamma_r t).$$

繼續計算我們有：

$$\begin{aligned}\langle \gamma_{r*}t, \gamma_{r*}t\rangle &= b_{ij}(\gamma_r t)(-v^i \sin t + w^i \cos t)(-v^j \sin t + w^j \cos t) r^2 \\ &= r^2(v^i v^j \sin^2 t - 2v^i w^j \sin t \cos t + w^i w^j \cos^2 t)\cdot \\ &\quad (a_{ij} + b_{ijhk}[v^h v^k \cos^2 t + 2v^h w^k \sin t \cos t + w^h w^k \sin^2 t] r^2 + \cdots) \\ &= r^2 \delta + r^4 b_{ijhk}[v^h v^k w^i w^k T(4, 0) \\ &\quad + 2(w^i w^j v^h w^k - v^i w^j v^h v^k) T(3, 1) \\ &\quad + (v^i v^j v^h v^k + w^i w^j w^h w^k - 4v^i w^j v^h w^k) T(2, 2) \\ &\quad + 2(v^i v^j v^h w^k - v^i w^j w^h w^k) T(1, 3) \\ &\quad + v^i v^j w^h w^k T(0, 4)] + \cdots,\end{aligned}$$

其中我們令 $T(p,q) = \cos^p t \sin^q t$ 。由於 $\gamma_* t$ 的長度就是

$$\delta\langle \gamma_{r*}t, \gamma_{r*}t\rangle = r^2(1 + f(t) r^2 + \cdots)$$

的平方根，所以可以展成泰勒級數如下：

$$|\gamma_{r*}t| = r(1 + \tfrac{1}{2} f(t) r^2 + \cdots).$$

當我們進行積分以求 γ_r 之長度時，我們會注意到 $T(p,q)$ 與 $T(q,p)$ 之積分完全相同，而且有 $T(3,1)$ 及 $T(1,3)$ 的積分為零，而 $T(2,2)$ 之係數中有一部分由 (5.14.3) 式會等於零，因此有：

$$\int_0^{2\pi} T(2, 2)\, dt = \frac{\pi}{4},$$

另外還有：

$$\int_0^{2\pi} T(4, 0)\, dt = \frac{3\pi}{4}$$

綜合這些資料 γ_r 的長度可以化簡成：

$$\begin{aligned}|\gamma_r| &= 2\pi r + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)dt\, r^3 + \cdots \\ &= 2\pi r + \tfrac{1}{8}\delta\pi r^3 b_{ijhk}(3w^iw^jv^hv^k + 3v^iv^jw^hw^k - 4v^iw^jv^hw^k) + \cdots.\end{aligned}$$

因此由截面曲率之定義式（5.14.1）可得：

$$\begin{aligned}K(P) &= -\tfrac{3}{8}\delta b_{ijhk}(3w^iw^jv^hv^k + 3v^iv^jw^hw^k - 4v^iw^jv^hw^k) \\ &= -\tfrac{3}{8}\delta(3b_{ihjk} + 3b_{jkih} - 2b_{ijhk} - 2b_{hkij})v^iw^jv^hw^k \\ &= -\tfrac{3}{8}\delta(3A - 2B) = 3\delta B,\end{aligned}$$

其中的A跟B就是定義於（5.14.4）及（5.14.5）式的那些。由（5.14.4）式，$A=-2B$，因此有$B=-(A-B)/3$，所以由（5.14.8）式得：

$$\begin{aligned}K(P) &= -\delta(A - B) \\ &= -\delta R_{ijhk}v^iw^jv^hw^k,\end{aligned}$$

可是：

$$\begin{aligned}\langle R(v, w)v, w\rangle &= \langle R^p_{ihk}v^hw^kv^i\partial_p(m), w^j\partial_j(m)\rangle \\ &= -R_{ijhk}v^iw^jv^hw^k,\end{aligned}$$

因此已導出：

$$K(P) = \delta\langle R(v, w)v, w\rangle. \tag{5.14.9}$$

要是在一開頭的時候所用的基｛v，w｝不見得是P中的一組正交單元基，則只需從（5.14.9）式中除掉一個正則化因子就可得出這時截面曲率的公式：

$$K(P) = \frac{\delta\langle R(v, w)v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}, \tag{5.14.10}$$

其中若$\langle\ ,\ \rangle$在P上爲正定，則$\delta=1$；若爲負定則$\delta=-1$。常常（5.14.10）式會被拿來當做定義式使用。

由習題 2.17.5 及 (5.14.10) 式可知，在一點的測距以及在該點對所有 P 的 $K(P)$ 就完全決定了在該點的曲率張量。因此當我們只考慮截面曲率時並不會遺漏掉任何曲率張量中所帶有的資訊。

第六章

物理上的應用

6.1 導論

把張量分析運用到動力學中的創始者是Lagrange ，因爲他最先對一個動力系統加以一般性的處理。其次就得推黎曼了，因爲他最先考慮任意維數的幾何。由於1854年黎曼所給的工作表達得很不明朗，因此我們看到Beltrami於1869年或者Lipschitz於1872年在應用這些幾何語言時都是小心翼翼的。事實上這方面的發展非常緩慢，使得像Levi-Civita的平行性概念要一直到1917年才出現。

在十九世紀結束以前黎曼幾何逐漸的演化成形，因此我們看到Darboux於1889年以及Hertz於1899年就把一個動力系統處理成一個點在d維空間中的運動。這種觀點在1894年也被Painlevé所採用，不過他大部分都附加入一個歐氏的測距。這時有關黎曼幾何的統一的或合宜的符號還一直沒有發展成功。

Ricci及Levi-Civita關於張量計算的發展在1900年藉著把張量分析的方法用進動力學中而達到高潮。可是他們的工作要一直等到1916年，當廣義相對論的影響力出現時才開始被大家熱切加以接納。

把張量分析的方法應用到動力學中的主要目的並不在於解決動力學的問題，而是在於把黎曼幾何（或者甚至更一般的幾何）之中的許多新觀念引到動力學之中。所得到的結果是令人驚奇的，Lagrange跟Hamilton在他們的動力學中所想加以摧毀的幾何精神復甦了。事實上，我們把這系統不再看成是在E^3中運動的一組非常複雜的粒子，而是看成一個單一的粒子在一個黎曼的d維空間中的運動。動力系統的一個狀位（configuration）被看成一點，而可以考慮由所有可能的狀位所組成的狀位空間或狀位流形。如果考慮在一個給定時間的狀位爲一點，則我們可以把動力系統看如一個事件的流形(manifold of events)，此即狀位及時間的流形。

在本章我們也介紹一個漢米頓流形的概念，就是在一流形中具有一個在每點均爲**極大秩**(maximal rank)之特定封閉二微分形（參看第 2.23 節）。做爲漢米頓流形的實例可以考慮任意 d 維流形 M 之餘切張量束：$T^*M = T^0_1M$（請看附錄 3 A）。特別可以取 M 爲 E^3 中 e 個粒子的狀位空間（第 6.5 節），這時的 T^*M 通常就稱爲**動相空間**(phase space)。把這個 T^*M 跟實數 R 做卡氏乘積所得到的 $(6e+1)$ 維流形稱爲**狀況空間**(state space)，這種狀況空間就引發我們進一步考慮**切觸流形**(contact manifold)。

能證明 Hamilton-Jacobi 的運動方程式：

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

（其中 p_i 及 q^i 爲廣義座標及動量，H 爲漢米頓函數，而一黑點代表對於時間的導數）。在一個齊次的切觸轉換（此即在一個能保持二微分形：

$$dp_i \wedge dq^i, \qquad i = 1, \ldots, 3e.$$

之形狀不變的座標變換）之下，這運動方程式能保持不變。

最後我們定義一個 d 維的切觸流形就是一個流形在其上擁有一個稱爲**切觸形**(contact form)的單微分形 ω 滿足：

$$\omega \wedge (d\omega)^r \neq 0, \quad 其中 \quad d = 2r + 1.$$

顯然在 $T^*M \times R$ 中，若 t 爲 R 中的座標，則

$$\omega = p_i dq^i - dt, \qquad i = 1, \ldots, 3e,$$

能滿足一個切觸形的條件，因此這流形就是一個切觸流形。

6.2 漢米頓流形

一個偶數 d ($d = 2r$) 維的流形上若具有一個漢米頓結構（或叫做**糾紐結構**(symplectic structure)），則這個流形 M 就叫做漢米頓流形。這兒所謂的糾紐結構意指一個特定的封閉二微分形 Ω，而且在 M 中的每一點

這個二微分形皆具有極大秩(maximal rank) d 。有時也把這漢米頓流形記爲 (M, Ω) ,其中這特定的斜紐結構 Ω 就叫做**基本形**(fundamental form)或斜紐形。

如同在黎曼幾何之中的情形,這個非退化的雙線性斜紐形 Ω 在每一點 $m \in M$ 都可以被看如一個線性同構映射:

$$\Omega_m : M_m \to M_m^*$$

所以整體來講就可以被看成從切向量束到餘切向量束之間的**束同構映射**(bundle isomorphism),或即保纖同構映射:

$$\Omega : TM \to T^*M.$$

這映射就告訴我們可以把一個向量場映射成一個單形,或即把下標提昇爲上標。反之若考慮其逆映射,則變成可以把上標下降成爲下標。我們下面的計算中所要用到的這種同構映射可以使用第 4.4 節的內消積運算 $i(X)$ 很方便的加以表達出來。對於一個向量場 X ,其對應的單形 ΩX 可以給爲:

$$\Omega X = i(X)\Omega. \tag{6.2.1}$$

現在如果把逆映射記爲: $V = \Omega^{-1} : T^*M \to TM$,則若 τ 爲隨便一個單形,那麼 $V\tau$ 就是 M 上的向量場滿足 $\Omega V\tau = \tau$ 。事實上由於 $X : M \to TM$ 又 $\Omega : TM \to T^*M$,所以 ΩX 更好記爲 $\Omega \circ X$ 以表明就是這兩映射的合成映射。類似的, $V\tau$ 更好是記爲 $V \circ \tau$ 。

設 τ 及 θ 爲兩個單形,我們可以定義他們的 Poisson 乘積爲對應於 $V\tau$ 及 $V\theta$ 之李乘積的單形,此即:

$$[\tau, \theta] = i([V\tau, V\theta])\Omega = \Omega[V\tau, V\theta].$$

顯然對於單形的這種乘積運算是反對稱的。

定理 6.2.1 兩個封閉單形之 Poisson 乘積是**恰當的**(exact)。

證明 由於 $i(Y)\Omega$ 只不過是將 $Y \otimes \Omega$ 加以收縮。而另方面 L_X 可以

跟收縮運算互相交換（習題3.6.3）同時確實是張量代數上的一種導運算，因此我們容易證明 L_X 關於內消積也是一個導運算：

$$L_X(i(Y)\Omega) = i(L_X Y)\Omega + i(Y)L_X\Omega.$$

此外由定理4.4.2我們有公式：

$$L_X = di(X) + i(X)d$$

因此對於封閉的單形 τ 及 θ，若把他們的對應向量場分別簡單記爲 $X = V_\tau$ 及 $Y = V\theta$，則有：

$$\begin{aligned}
[\tau, \theta] &= i([X, Y])\Omega \\
&= i(L_X Y)\Omega + i(Y)\, d\tau \\
&= i(L_X Y)\Omega + i(Y)\{di(X)\Omega + i(X)\, d\Omega\} \\
&= i(L_X Y)\Omega + i(Y)L_X\Omega \\
&= L_X i(Y)\Omega \\
&= di(X)\theta + i(X)\, d\theta \\
&= d\{i(X)\theta\}.
\end{aligned}$$

□

下面這個定理最好拿來跟定理2.23.1相比較，一個是就整個流形的，一個是單獨就一點來考慮的。如果存在一個單形 ω 滿足 $\Omega = d\omega$，則把定理6.2.2關於這單形重新寫出來就是有名的Darboux定理，請看定理6.8.1。要證明這些定理我們必須使用Poincaré引理之逆（定理4.5.1）以及Frobenius的完全可積分性定理（定理3.12.1及定理4.10.1）。

定理 6.2.2 假設 Ω 是在 d 維流形 M 之上的封閉二微分形，而在每一點其秩皆爲 $2k$。則在 M 中每點之某鄰域上存在座標：

$$p_i,\ q^i\ (i = 1, \ldots, k),\text{以及}\ u^\alpha\ (\alpha = 1, \ldots, d - 2k)$$

使得正好：

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i.$$

證明（省略）。

由於一個漢米頓流形 (M, Ω) 中的基本形是封閉的，而且在每點之秩皆為 d，因此局部上都可以將其表示成：

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i, \qquad i = 1, \ldots, r = d/2.$$

我們就把這種局部座標 p_i，q^i 稱為漢米頓座標。至於兩組這種漢米頓座標系統，例如 p_i，q^i 及 P_i，Q^i，之間的賈氏方陣則為一個斜紐方陣（定理 2.23.2）。特別我們有如下關係：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} &= \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}, & \frac{\partial p_i}{\partial Q^j} &= -\frac{\partial P_j}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial q^i}{\partial P_j} &= -\frac{\partial Q^j}{\partial p_i}, & \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} &= \frac{\partial P_j}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

習題 6.2.1 流形 M 上能夠具有一個漢米頓結構的充要條件為 M 上存在一個圖表集，使得其中任何兩組有重疊的座標系統之間關係式（6.2.2）一定能滿足。

定理 6.2.3 使用漢米頓座標 p_i，q^i，我們可以把前面的保纖同構映射 Ω 與 V 給為：

$$\Omega\left(a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = -b^i\, dp_i + a_i\, dq^i, \tag{6.2.3}$$

$$V(f^i\, dp_i + g_i\, dq^i) = g_i \frac{\partial}{\partial p_i} - f^i \frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{6.2.4}$$

特別若 f 為 M 上的函數，則：

$$V\, df = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{6.2.5}$$

（證明：這些性質可由運算 $i(X)$ 的定義直接導出。）

如果 f 及 g 爲 M 上的函數，則 df 及 dg 爲封閉的單形，因此根據定理 6.2.1，$[df, dg]$ 這單形是恰當的。在該定理的證明中我們有一種方法去找出一個函數使得其外微分正好等於這單形，我們就把這個特別的函數稱爲 f 及 g 的 Poisson 乘積 $\{f, g\}$，此即：

$$\{f, g\} = i(V\,df)\,dg = (V\,df)g. \tag{6.2.6}$$

若使用漢米頓座標 p_i，q^i，我們也有：

$$\{f, g\} = \frac{df}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{6.2.6}$$

下面還有一個定理，其證明就做爲一個習題，請讀者設法加以弄清楚。

定理 6.2.4 假設 f 及 g 爲漢米頓流形 (M, Ω) 上的函數，則下面這些性質互相等價。

(a) 沿著 $V\,dg$ 的積分曲線 f 爲常數。

(b) 沿著 $V\,df$ 的積分曲線 g 爲常數。

(c) $\{f, g\} = 0$。

習題 6.2.2 請證明下列關係式：

$$\text{(a) } \{f, q^i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \text{(a}'\text{) } dq^i = \Omega\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

$$\text{(b) } \{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \qquad \text{(b}'\text{) } dp_i = -\Omega\frac{\partial}{\partial q^i}.$$

習題 6.2.3 (a) 試證 Poisson 乘積運算是雙線性的。

(b) 試證下列恆等式：

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}.$$

(c) 試證賈氏恒等式也能成立：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

一個向量場 X 如果能夠使得漢米頓結構保持不變，此即若能滿足：

$$L_X \Omega = 0.$$

我們就說這向量場是個漢米頓向量場（或者說是這漢米頓結構的無窮小自同構映射（infinitesimal automorphism）。但是已知 Ω 爲封閉的，因此：

$$\begin{aligned} L_X \Omega &= di(X)\Omega + i(X)\, d\Omega \\ &= di(X)\Omega. \end{aligned}$$

換言之向量場 X 爲漢米頓的充要條件爲 ΩX 是封閉的。通常在一個流形上有許多的封閉單形（例如考慮任意函數的微分形），因此對於漢米頓結構而言存在有許多的自同構映射。這種情況正好跟黎曼結構的情形大不相同，因爲對於黎曼結構的自同構映射就是保距同構與 Killing 向量場，流形上的這種東西卻是很少的。

習題 6.2.4 試證兩個漢米頓向量場的李乘積仍然是個漢米頓向量場。

習題 6.2.5 假設 $N = P = S^2$ 是 E^3 中的單位球面，在其上考慮由歐氏空間所誘引出來的黎曼結構。取 $M = N \times P$，而且令 $q: M \to N$, $p: M \to P$ 爲自然投射。假設 N 及 P 之黎曼體積元素分別爲 α 及 β，試證 $\Omega = q^*\alpha + p^*\beta$ 是 $M = S^2 \times S^2$ 上的一個漢米頓結構。

6.3 餘切束上的標準漢米頓結構

一個流形（特別在緊緻的流形）之上我們考慮漢米頓結構的存在性時，需要受到拓樸條件很強的限制。可是如果我們考慮一個流形的餘切束，那麼我們就可以十分自然的指定給它一個漢米頓結構而使它成爲一個漢米

頓流形。進一步使用黎曼測距來做對偶的考慮可以看出切束是跟餘切束互相可微同胚的，因此一個切束也自然具有漢米頓結構。

定理 6.3.1 在一個流形M的餘切束T^*M之上，一定存在一個標準的(canonical)漢米頓結構。

證明　從$T^*M=N$的切束TT^*M出發我們可以考慮兩個自然的投射。一個是投射到T^*M上，就是切束之自然投射：$\pi: TN\to N$，而另一個卻投射到TM上，就是考慮餘切束之自然投射$p: T^*M\to M$的切映射$p_*: TT^*M\to TM$。現在對於同一個向量：$x\in TT^*M$我們施加這兩個投射，然後運用下式來定義一個單形θ在x所取的值：

$$\langle x, \theta\rangle = \langle p_* x, \pi x\rangle.$$

由於x在$(T^*M)_n$裏變動時$n=\pi x$都固定不變，而且p_*在每一個$(T^*M)_n$均爲線性的，因此顯然θ眞的是一個單形。這樣$d\theta$應該是一個封閉的二微分形。現在想證明這個二微分形具有極大秩。同時我們也要寫出θ及$d\theta$的局部表示式。

設$\{X_i\}$爲M上的一組局部基，而$\{\omega^i\}$爲其對偶基，又取：$p^*\omega^i=\tau^i$：現在每一個X_i都能給出T^*M上的一個實值函數p_i，此即對任意$n\in T^*M$，取：

$$p_i n = \langle X_i(pn), n\rangle. \tag{6.3.1}$$

另方面我們可以把隨便一個向量$t\in M_m$關於基$\{X_i(m)\}$表示成：

$$t = \langle t, \omega^i_m\rangle X_i(m).$$

對於$x\in(T^*M)_n$，若$m=pn=p\pi x$，則有$p_* x\in M_m$，因此按上式有：

$$\begin{aligned} p_* x &= \langle p_* x, \omega^i_m\rangle X_i(m)\\ &= \langle x, p^*\omega^i_m\rangle X_i(m)\\ &= \langle x, \tau^i_n\rangle X_i(m). \end{aligned}$$

但是關於單形 θ 我們有：

$$\begin{aligned}\langle x, \theta\rangle &= \langle p_* x, n\rangle \\ &= \langle\langle x, \tau^i_n\rangle X_i(m), n\rangle \\ &= \langle x, \tau^i_n\rangle\langle X_i(m), n\rangle \\ &= \langle x, \tau^i_n\rangle p_i n \\ &= \langle x, (p_i n)\tau^i_n\rangle,\end{aligned}$$

可見其局部表示式可以寫成：

$$\theta = p_i \tau^i. \tag{6.3.2}$$

取其外導數就得到二微分形：

$$d\theta = dp_i \wedge \tau^i + p_i\, d\tau^i. \tag{6.3.3}$$

要證明 $d\theta$ 具有極大秩，我們來考慮 $X_i = \partial/\partial x^i$ 爲一組座標基的情形，這時：

$$\omega^i = dx^i \;\;, d\tau^i = d(p^* dx^i) = p^* d^2 x^i = 0.$$

而且若令 $q^i = x^i \circ p$，則 p_i 及 q^i 正是 T^*M 上由 M 之局部座標 x^i 所引出的特別座標（參看附錄 3 A），因此：

$$d\theta = dp_i \wedge dq^i, \tag{6.3.4}$$

所以這二微分形顯然具有極大秩。□

注意 T^*M 上這個漢米頓結構的基本形 $\Omega = d\theta$ 是恰當的。我們把 θ 及 Ω 分別稱爲是 T^*M 上的標準單形及標準二微分形。

對於隨便在 M 上的一個向量場 X，我們可以採用上面的（6.3.1）式來定義出 T^*M 上的一個實值函數 P_X 爲：

$$P_X n = \langle X(pn), n\rangle.$$

這個 P_X 稱爲**動量的** X **成分**（X-component of momentum）。由於 dP_X

是T^*M上的封閉單形，因此其對應向量場$V\ dP_X$正是T^*M上之標準漢米頓結構的一個無窮小自同構映射。事實上下面的定理指出$V\ dP_X$的流線還可以直接由X之流線得出：

定理 6.3.2 假設$\{\mu_t\}$為X之流線，則$\{\mu_t{}^*\}$就是$V\ dP_X$的流線，此外還有：$p_* V\,dP_X = -X\circ p.$

證明：取

$$\varphi_t = \mu_t^*: T^*M \to T^*M,\ M_m^* \to M_{\mu_{-t}m}^*.$$

則有 $p\circ\varphi_t = \mu_{-t}\circ p$ 能證明在φ_t之下標準單形θ能保持不變，此即：$\varphi_t{}^*\theta = \theta$。事實上對於$y\in(T^*M)_n$我們有：

$$\begin{aligned}
\langle y, (\varphi_t^*\theta)(n)\rangle &= \langle y, \varphi_t^*(\theta)\varphi_t n))\rangle \\
&= \langle \varphi_{t*}y, \theta(\mu_t^* n)\rangle \\
&= \langle p_*\varphi_{t*}y, \mu_t^* n\rangle \\
&= \langle \mu_{t*}p_*\varphi_{t*}y, n\rangle \\
&= \langle(\mu_t\circ\mu_{-t}\circ p)_* y, n\rangle \\
&= \langle p_* y, n\rangle \\
&= \langle y, \theta(n)\rangle.
\end{aligned}$$

容易證明這個$\{\varphi_t\}$是T^*M上的流線，因此存在T^*M上的一個向量場W就以$\{\varphi_t\}$為其流線。而上面所已證的結果就等於$L_W\theta = 0$。可是：

$$L_W\theta = di(W)\theta + i(W)\,d\theta = d\langle W, \theta\rangle + \Omega W,$$

因此 $W = -Vd\langle W, \theta\rangle$ 現在對於$n\in T^*M$，若γ為W的一條由n點出發的積分曲線，則$\gamma(t) = \varphi_t n$，還有 $p\gamma(t) = p\varphi_t n = \mu_{-t}pn$，因此：

$$p_* W(n) = -X(pn),\ \text{或即}\ p_* W = -X\circ p.$$

最後可以計算：

$$\begin{aligned}\langle W, \theta\rangle &= \langle p_* W, \pi W\rangle \\ &= -\langle X\circ p,\ T^*M\text{上的恒等元素}\rangle \\ &= -P_X.\end{aligned}$$

因此向量場 $-V\,dP_X$ 與 X 是 p 相關的，稱爲原來向量場 X 到餘切束 T^*M 的**標準提昇**（canonical lift）。

習題 6.3.1　假設 x^i 爲 M 上的座標，∂_i 爲其座標向量場，p_i 爲動量的 ∂_i 成分。$q^i = x^i\circ p$，又 $X = f^i\partial_i$，則向量場 X 到 T^*M 的標準提昇爲：

$$-V\,dP_X = -p_i(\partial_j f^i\circ p)\frac{\partial}{\partial p_j} + f^i\circ p\frac{\partial}{\partial q^i}$$

習題 6.3.2　T^*M 上的切向量 y 若滿足 $p_* y = 0$ 則說是**垂直的**（vertical），試證明下列諸性質：

(a)　$(T^*M)_n$ 中所有的垂直切向量構成一個 d 維的子空間 $W(n)$。

(b)　這種子空間所組成的**切佈**（distribution）W 擁有 $\{\partial/\partial p_i\}$ 爲其局部基。

(c)　定義映射 α_n: $W(n)\to M^*_{pn}$ 爲 $\alpha_n(c_i\,\partial/\partial p_i(n)) = c_i\,dx^i(pn)$，則這映射是個與座標 x^i 之選取無關的線性同構映射。

(d)　向量場 $V\theta$ 是垂直的，而且滿足 $\alpha_n(V\theta(n)) = n$。這意思是說，當我們把 M^*_m 上的切向量認同爲 M^*_m 中的元素時，$V\theta$ 就是**位移向量場**（displacement vector field）。

習題 6.3.3　我們也可以定義向量場到 TM 的標準提昇爲 TM 上那個以 $\{\mu_{t*}\}$ 爲其流線的向量場。試證明這標準提昇其實正好就等於 $X_*: TM\to TTM$。

6.4 半黎曼流形上的測地噴場

T^*M 上面的漢米頓結構使我們可以直接由能量函數來得出M上一個半黎曼連繫的測地噴場（參看定理 5.12.1）。爲方便起見我們在TM之能量函數中放進 1/2這因子而重新定義：

$$Kv = \tfrac{1}{2}\langle v, v\rangle,\ \text{其中 } v \in TM\text{，又}\langle\ ,\ \rangle\text{為半黎曼測距}$$

由這個測距我們可以得切束認同爲餘切束而有一個束同構映射 $\mu : T^*M \to TM$。因此可以把上面的能量函數看成爲一個定義於T^*M上之函數$T = K\circ\mu$。同樣在TM上的測地噴場就可以跟一個在T^*M上的向量場J彼此μ相關，此即$J=\mu_*^{-1}\circ G\circ\mu$。請看下面這個可交換的圖式以幫助瞭解上面所有這些符號。

$$\begin{array}{ccccc}
T^*T^*M & \xrightarrow{V} & TT^*M & \xrightarrow{\mu_*} & TTM \\
 & & \uparrow J & & \uparrow G \\
 & & T^*M & \xrightarrow{\mu} & TM \\
 & & & p \searrow \quad \swarrow \pi & \\
 & & & M &
\end{array}$$

我們以後爲方便起見仍然把T及J分別稱呼爲能量函數及測地噴場。

引理 6.4.1 測地噴場J的特徵性質如下。假設D爲半黎曼連繫，而$E=p^*D$爲在p上由D所誘引而來的連繫，又把μ看成爲一個在p之上的向量場，則有：

(a′) $p_*J = \mu.$

(b′) $E_J\mu = 0.$

證明 使用上面的圖式很容易看出 (a′) 及 (b′) 可以立即由定理 5.12.1 中的特徵性質(a)及(b)得來。□

下面第二個引理之證明也只是一些很簡單的計算，因此就將其證明省略不提了。

引理 6.4.2 假設 $\{F_i\}$ 是 M 上的一組局部正交單元基。令 $a_i = \langle F_i, F_i \rangle$，又取 $p_i = P_{F_i}$ 爲動量的 F_i 成分。則 μ 及 T 的局部表示式分別爲

$$\mu = \sum a_i p_i F_i \circ p, \tag{6.4.1}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum a_i p_i^2. \tag{6.4.2}$$

定理 6.4.1 在 M 上考慮半黎曼連繫 D，則在 T^*M 上的測地噴場爲 $J = -V\,dT$，其中 T 爲 T^*M 上的能量函數，而 V 爲 T^*M 上標準漢米頓運算 Ω 之逆運算。

證明 我們將使用上面兩引理中的符號。取 $\{\omega^i\}$ 爲 $\{F_i\}$ 的對偶基，而令 ω^i_j 爲 D 的連繫形，又分別令：

$$\tau^i = p^*\omega^i, \text{以及 } \tau^i_j = p^*\omega^i_j.$$

則 τ^i_j 爲 $E = p^*D$ 的連繫形，他們就如同 ω^i_j 一樣滿足反伴隨的條件：$\tau^i_j = -a_i a_j \tau^j_i$（不取和）。我們把第一結構方程式回拉到 T^*M 中就給出：

$$d\tau^i = -\tau^i_j \wedge \tau^j,$$

將其代入 (6.3.3) 式就得出我們的標準二微分形之局部表達式：

$$\Omega = (dp_i - p_j\tau^j_i) \wedge \tau^i.$$

令 $X = -V\,dT$，則由 (6.4.2) 式以及 V 的定義可得：

$$\begin{aligned} dT &= \sum a_i p_i\, dp_i \\ &= -i(X)\Omega \\ &= \tau^i(X)\, dp_i - \{Xp_i - p_j\tau^j_i(X)\}\tau^i - \tau^i(X)p_j\tau^j_i. \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

由於 $\{dp_i, \tau^i\}$ 是 T^*M 上的一組局部對偶基，而且 τ_i^j 均爲這些 τ^i 的線性組合，因此 (6.4.3) 式中 dp_i 項的係數應該一致，而有：

$$\tau^i(X) = a_i p_i. \tag{6.4.4}$$

這就使得 $\tau^i(X)p_j\tau_i^j$ 這項變爲零，因爲：

$$\begin{aligned}\tau^i(X)p_j\tau_i^j &= \sum_{i,j} a_i p_i p_j \tau_i^j = -\sum_{i,j} a_i p_i p_j a_j a_i \tau_j^i \\ &= -\sum_{i,j} a_j p_j p_i \tau_j^i.\end{aligned}$$

所以 (6.4.3) 式中剩下的那些項應等於零，此即：

$$Xp_i - p_j\tau_i^j(X) = 0. \tag{6.4.5}$$

X 能夠滿足條件 (a′) 與 (b′) 在局部上表示出來正好就是 (6.4.4) 與 (6.4.5) 兩式，因爲：

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}')\ p_*X = \omega^i(p_*X)F_i \circ p = \tau^i(X)F_i \circ p = \sum a_i p_i F_i \circ p = \mu. \\
&(\mathbf{b}')\ E_X\mu = E_X \sum a_i p_i F_i \circ p = \sum a_i(Xp_i)F_i \circ p + \sum a_j p_j E_X F_j \circ p \\
&\qquad = \sum_i \{a_i(Xp_i) + \sum_j a_j p_j \tau_j^i(X)\}F_i \circ p \\
&\qquad = \sum_i a_i\{Xp_i - \sum_j p_j \tau_i^j(X)\}F_i \circ p \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

因此根據引理 6.4.1 應有 $X = J$ 。□

6.5 動相空間

我們來考慮古典力學中所談論到的在 R^3 中的 e 個粒子，設 $m_1, \cdots\cdots, m_e$ 分别爲其質量。由於任何兩粒子不可能同時佔據同一位置。因此這個粒子系統的狀位空間 (configuration space) M 就是 R^{3e} 中的一個子集合。假設第 i 個粒子的座標爲：

$$(x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i})$$

則 M 中的點就是在 R^{3e} 中能夠滿足對於所有 $i \neq j$ 都有：

$$(x^{3i-2} - x^{3j-2})^2 + (x^{3i-1} - x^{3j-1})^2 + (x^{3i} - x^{3j})^2 \neq 0,$$

這性質之所有點的集合，因此 M 是 R^{3e} 中的一個開子流形，而且其維數爲 $3e$ 。

假設施加於第 i 個粒子的力場的三個向量分記爲：

$$(F_{3i-2}, F_{3i-1}, F_{3i})$$

則運動方程式應爲：

$$F_{3i-\alpha} = m_i \frac{d^2x^{3i-\alpha}}{dt^2} \qquad (\text{不取和})$$

其中 $i = 1, \ldots, e$ 又 $\alpha = 2, 1, 0$ 。爲簡化起見令：

$$k_1 = k_2 = k_3 = m_1,\ k_4 = k_5 = k_6 = m_2,\ \text{等等}$$

則上面方程式變成：

$$k_i \frac{d^2x^i}{dt^2} = F_i \qquad (\text{不取和}) \tag{6.5.1}$$

其中 $i = 1, \ldots, 3e$ 。如果有一個位能函數 U 存在，則這些力成分 F_i 可以給爲 $F_i = -\partial U/\partial x^i$

這個系統另外一個特色就是存在一個動能（kinetic-energy）函數 K ，就是所有這 e 個粒子之動能的和。這是這些粒子之速度的函數，因此可以認爲就是切束 TM 上的函數。若 $v = v^i\,\partial_i(m) \in M_m$ ，則動能的座標公式爲：

$$K = \frac{1}{2}\sum k_i(v^i)^2.$$

由於在每個M_x上K都是一個二次形，因此可以對其加以**偏極化**(polarized)(請看第2.21節)以得到M上的一個黎曼測距使得其能量函數正好就是我們的動能K，此即滿足：

$$\langle\ ,\ \rangle = \sum k_i(dx^i \otimes dx^i).$$

這個特別的黎曼測距就叫做M上的**動能測距**(kinetic-energy metric)。在目前討論的這簡易實例中這測距是仿射的。因此其測地線是R^d中的直線。當力場為零，$F_i=0$之時，(6.5.1)式之解正好就是測地線。這結果也可以被推廣到更一般的系統。

現在想要從我們所學過的一些結構(黎曼及漢米頓)的角度來重新檢驗上面這個實例。我們可以把二階的運動微分方程式看成是狀位空間之切束上的一個向量場。可是另方面從物理角度的考慮，一個力場卻應該是一個單微分形而非向量場。因為，所以能顯明有力場存在就是因為粒子沿著各個路徑運動時必須做**功**(work)。至於所做功之值如何被指定到各條路徑上正好就等於一個單形沿著這路徑的積分值。可見一個力場是被看如一個單形。尤有進者，一個力場常常可以給成是某個位能場U的微分形而寫為$-dU$。我們知道沿著一條曲線所做的功是與這粒子的質量無關的，因此在(6.5.1)式中所牽涉到的質量應該被追溯到我們結構的其他部分才對。把一個記為單形的力場改換成為一個出現於(6.5.1)式中記為向量場的力場是透過前述的動能測距來將切向量與餘切向量互相認同的。因此力單形與動能測距的交互作用已經足夠表示一個古典力學問題的結構了，我們到底在什麼地方還需用到額外的漢米頓結構呢？這問題的回答似乎是在這麼簡單的實例裏，我們誠然不需用到漢米頓結構，可是若把漢米頓結構用進來卻會很方便，又能幫助我們做更深入的透視與瞭解，同時可以有機會推廣到較複雜較一般的系統。既然已有在T^*M上的漢米頓系統可用，我們不妨就大膽的用下去。這時第6.2節中的一些抽象化的定理立即可以自然的被翻譯成一些有關**動量保存**(conservation of momentum)的重要定理。

總括來講對於力學系統的一個可行的數學模型會由下列各項所組成：

(a) 一個狀位空間M。

(b)　一個力場F，此即一個在M上的單微分形。

(c)　一個動能測距＜，＞．靠著這個測距我們就有可微同胚映射μ：$TM \to T^*M$，因此可以把軌道的向量場以及所有其他的特徵全都看如T^*M中的東西。換言之，我們透過動能測距來對一個速度指定一個動量。

(d)　在T^*M上的標準漢米頓結構。

現在就試著把上面的實例中的所有結構都考慮到T^*M上來，而且使用其中的局部座標$p_i = P\partial_i$及$q^i = x^i \circ p$來加以表達。則這時粒子的軌道微分方程式，(6.5.1)式就對應成T^*M中動量的路徑所滿足的一階微分方程式：

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{1}{k_i} p_i, \qquad \frac{dp_i}{dt} = F_i \circ p. \tag{6.5.2}$$

因此動相空間T^*M上就定義出一個流線來，其向量場爲

$$X = \sum_i \left(\frac{p_i}{k_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + F_i \circ p \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \tag{6.5.3}$$

我們也把這向量場之積分曲線照樣稱爲軌道(trajectories)。

使用T^*M上標準漢米頓結構之運算Ω的公式(6.2.3)我們能得出：

$$\begin{aligned} \Omega X &= -\sum \frac{p_i}{k_i} dp_i + \sum F_i \circ p \, dq^i \\ &= -dT + p^*F, \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

其中：

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{k_i} = K \circ \mu$$

是T^*M上的動能，而$F = F_i dx^i$爲M上的力場。如果這個力場是個位能場(potential field)，此即存在某個位函數U使得$F = -dU$，則若令$V = U \circ p$，我們就得到T^*M上的漢米頓函數，此即這個系統的總能量：

$$H = T + V.$$

這時我們可以將(6.5.4)式寫成：

$$\Omega X = -dH.$$

所以由定理6.2.4以及顯然的性質 $\{H, -H\} = 0$ 可以立即結論出沿著所有的軌道上，H的值都是常數。這定理就叫做能量保存定律或能量不滅定律。更一般來講由定理6.2.4可知一個在 T^*M 上的函數 f 沿著所有軌道上皆爲常數的充要條件就是：$\{f, H\} = 0$，或即：$(V\,df)H = 0$。

現在若假設位函數U只與粒子之間的距離有關，則在 R^3 本身的任何歐氏運動之下U都保持不變。若把這樣的歐氏運動延拓到TR^3上，則每個粒子的動能都能維持不變。如果考慮 R^3 上的一個歐氏運動，而且在 R^3 的 e 個複本中都考慮同一歐氏運動，這些合在一起就可看成是 R^{3e} 中的一個可微同胚 φ。顯然M可以認爲是 R^{3e} 中在 φ 之下的一個不變子集合(invariant subset)。最後我們還可以把 φ 延拓到T^*M上，而得到 $(\varphi^*)^{-1}$。這兒所以要考慮逆映射爲的是使其投射正好等於 φ，因爲 φ^* 是把微分形往回拉而非往前推。在這個延拓(extension) $(\varphi^*)^{-1}$ 之下，T及V能保持不變，因此H就保持不變，而有：$H \circ \varphi^* = H$。

現在考慮 R^3 上的一個平行的向量場：

$$Y = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$$

其中 a，b 及 c 爲一些常數。則這平行向量場的流線爲平移(translations)所構成的單參數群。把這向量場延拓到M上得出：

$$Z = \sum_{i=1}^{e} a\,\partial/\partial x^{3i-2} + b\,\partial/\partial x^{3i-1} + c\,\partial/\partial x^{3i}.$$

若再進一步延拓到T^*M上就得出Z的標準提昇(canonical lift) $-V\,dP_Z$(參閱定理6.3.2)。如果U只單與距離有關，則H在 $-V\,dP_Z$的流線之下會保持不變，此即H沿著這個 $-V\,dP_Z$ 的積分曲線爲常數。再使用定理6.2.4立即看出 P_Z 沿著軌道上爲常數。這就稱爲線性動量(linear

momentum)的保存(或不滅)定律。完全類似的考慮,但是把Y這向量場換成爲R^3上其流線爲繞某條軸旋轉的單參數群,則我們就能得出角動量(angular momentum)的不滅律。

事實上並不需要把上面的分析限制到只考慮R^3上e個粒子的情形,或者限制只考慮其動能測距爲仿射的情形。只要引入適當的一些對於粒子之位置及速度的拘束條件,我們可以得出更一般的力學系統。像我們在第1.2(c)節所考慮的雙擺就是一個好例子。一個能夠對某固定點任意旋轉的剛體(rigid object)之狀位空間可以看如三維的實射影空間RP^3。

如果某一個力學系統中所有對於某粒子之速度所加給的拘束條件全部皆可以由那些對於該粒子之位置所加給的拘束條件來推導出來,則這種系統就稱爲是個整則(holonomic)的系統。在這種系統中,狀位空間M的每一個切向量一定切於某條軌道。因此所有可能之速度所構成的集合就等於TM全體。如果同樣這些粒子被看成是在R^3中,則其狀位空間M就變成是R^{3e}裏的一個子流形,其維數正好等於這系統的自由度。把上面所考慮的動能測距限制到M上來仍能用以將TM認同爲T^*M,因此後者就是一個整則的系統之動相空間。力場F仍然是M上的一個單形,而動能函數T定義於T^*M,至於這T^*M上的軌道流線則可以如前給爲:

$$X = V(-dT + p^*F),$$

如果這力場爲零,則M中的軌道就是這個動能測距的測地線,正如定理6.4.1所示。

如果這力場是個位能場$-dU$,我們可以照上面定義出漢米頓函數$H=T+V$。這時T^*M上的運動方程式可以由向量場$-V\,dH$來給出。因此若取p_i,q^i爲T^*M上之標準結構的漢米頓座標,則運動方程式正是通常所謂的Hamilton-Jacobi 方程式:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{6.5.5}$$

這些分析的一大好處在於我們知道我們可以使用任意的漢米頓座標。譬如說,我們不見得必須要求這些座標要由M上的座標x^i得來而取:

$$p_i = F_{\partial_i} \text{ 以及 } q^i = x^i \circ p.$$

事實上我們可以嘗試去找出適當的漢米頓座標來使H的表示式變得愈簡單愈好。特別如果我們能夠把$\{f, H\} = 0$的解（包含H本身）拿來放在座標中，則除了在指明其始值的場合以外，這些座標全都不見了，而使得這系統表示起來更加簡潔。

與上面簡單的情況相反，如果某一個力學系統中對於速度所加的某些拘束條件無法從那些對位置所加的拘束條件來導引出來，則這系統稱爲非整則（nonholonomic）的系統。這種系統中最常見的要算是那種在狀位空間M的每一點，其速度拘束條件皆爲線性的系統，因此這種系統就決定了M上的一個切佈D。這樣的系統也被稱爲是一個線性的非整則系統。如果這時的切佈D是完全可積分的，則其極大的積分子流形就將M切片而變成爲一族整則的系統，此即：對於每個起始的狀況（initial state），存在一些額外的關於位置的附加條件可以給出一個整則的系統，是能包含這起始狀況之軌道的。如果所考慮的是一個一般的非整則系統，那麼其中的拘束條件就決定了TM中的一個子流形Q，其中M當然是指這系統的狀位空間。這時可以定義T^*M中的子流形$P = \mu^{-1}Q$爲這系統的動相空間（phase space）。由於力場F可能無法跟速度拘束條件相諧調，因此我們在考慮運動方程式（6.5.2）時必須把p^*F局限到動相空間P之上。這其中的前面d條方程式$dq^i/dt = p_i/k_i$完全不變，只除了我們把p_i解釋爲限制到P之上。原因是這些方程式只不過表明T^*M中的曲線正好就是M中曲線的速度向量場被μ^{-1}轉換而得出的。可是再下一步對應於方程式（6.5.4）時就行不通了，因爲這時Ω在P變成是退化的，而不再是個漢米頓結構了。爲證明Ω的這種退化性，我們只需注意一個非整則的系統在局部上可以藉著k條如下的拘束條件來定義出來：

$$dp_i = \sum_{j=k+1}^{d} f^j dp_j, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{6.5.6}$$

其中p_i是M上某個座標系統x^i的∂_i動量成分（這兒$\partial_i = \partial/\partial x^i$）。讀者不妨自行證明當我們把（6.5.6）式代進：

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i,$$

時，其秩經計算只為 $2(d-k)$，可是 P 的維數卻為 $\dim P = 2d-k$，因此這二微分形是退化的。

一個圓球在一個曲面上滾動若不產生任何溜滑（sliding）現象，則所得的系統是一個線性的非整則系統。這時的狀位空間與圓球會溜滑時的情形一樣，因此仍然是五維的。可是這時對於速度卻加入了兩條線性的拘束條件而使得動相空間 P 為 8 維。可是另方面這速度切佈並非為可積分的，因為任何一個狀位都可以由任何另一個狀位藉著足夠的滾動來得出。

我們在以下的幾節都假設所考慮的系統是整則的系統。

6.6 狀況空間（state space）

在上面的分析中我們並沒有考慮力場可能會隨著時間而變化。可是就算力場隨著時間而變化，我們的分析也不致於全然失效，因為很簡單我們只需把時間 t 加進來以做為一個額外的參數就可。這時運動方程式（6.5.2）仍然成立，只不過必須記住這時的 $F_i \circ p$ 並不是定義在 T^*M 上，而是定義在 $S = T^*M \times R$ 上。當然對於這額外的變數 t，我們必須補入另外一條方程式：

$$dt/dt = 1.$$

因此（6.5.3）式所給的向量場 X 應該改寫成：

$$X = \sum_i \left(\frac{p_i}{k_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + F_i \circ p \frac{\partial}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \qquad (6.6.1)$$

當然我們也可以把以前那個 X 解釋為一族隨著參數而變化的定義於 T^*M 上的向量場，因此（6.5.4）式仍然有意義。我們把 S 稱為這系統的狀況空間。

如果系統中的力場是某個在 T^*M 上隨時間而變化之位函數 $V = U \circ p$ 之位能場，則 dH 中的成分 $(\partial V/\partial t)dt$ 應加以丟棄，而有：

$$X = -V\,dH + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{6.6.2}$$

其中 $V = \Omega^{-1}$ 。S 上的一個函數 f 在軌道上爲常數的條件：$Xf = 0$ ，可以寫成：

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{6.6.3}$$

偏微分方程式 (6.6.3)的一個解 f 就稱爲是運動方程式的一個第一積分。若想簡化運動方程式的局部座標表示式，明顯的做法就是把儘多的第一積分拿來做爲 S 上的座標函數使用。可是在與時間有關的情形下，要命的是我們的漢米頓函數 H 不再是一個第一積分，因爲：

$$\{H, H\} + \partial H/\partial t = \partial H/\partial t \neq 0$$

因此這系統的總能量並無法保持不變。

6.7 切觸坐標

考慮卡氏乘積的投射：

$$q: T^*M \times R \to T^*M \;\; , q(n,t) = n,$$

則由 T^*M 上的標準單形 θ 我們可以得出 S 上的一個單形 $q^*\theta$ 。爲方便起見我們在符號上不區分 θ 及 $q^*\theta$ ，因此直接就用 θ 來代表 S 上的一個單形。而定義：

$$\omega = \theta - dt$$

爲 $T^*M \times R$ 上的**標準切觸形**(canonical contact form)。若表爲特別的座標：

$$p_i = P_{\partial_i} \text{以及} \; q^i = x^i \circ p$$

我們有：

$$\omega = p_i\, dq^i - dt. \tag{6.7.1}$$

S 上的一組座標 P_i，Q^i，u 若能使得 ω 用這組座標寫起來其形狀與（6.7.1）式相似，此即：

$$\omega = P_i\, dQ^i - du. \tag{6.7.2}$$

則這組座標就稱爲是一組**切觸座標**（contact coordinates）。對（6.7.1）及（6.7.2）式取其外導數可得：

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i; \tag{6.7.3}$$

換言之，二微分形 Ω 在所有切觸座標系統中的樣子皆相同。因此，如果考慮 T^*S 中由 dp_i 及 dq^i 所張開來的餘切佈，則這餘切佈完全跟由 dP_i 及 dQ^i 所張開來的餘切佈 E^* 相等（這餘切佈就是在映射 $\Omega : TS \to T^*S$ 之下原來切佈的映像），請參考定理 2.23.1。這時與之相伴隨的切佈 E 因此必是一維的，而由 $\partial/\partial t$ 或 $\partial/\partial u$ 所生成。可見這兩個向量場 $\partial/\partial t$ 及 $\partial/\partial u$ 彼此線性相關，此即：

$$\partial/\partial u = f\, \partial/\partial t.$$

但是另方面：

$$\langle \partial/\partial u, \omega\rangle = \langle \partial/\partial u, du\rangle = 1 = \langle f\, \partial/\partial t, \omega\rangle = f\langle \partial/\partial t, dt\rangle = f,$$

因此得證：$\partial/\partial u = \partial/\partial t$。換言之，向量場 $\partial/\partial t$ 可由 ω 唯一的決定，而爲任何一個切觸座標系統中的座標向量場。而立即可得如下的結論：

$$u = t + \text{某個 } p_i \text{ 及 } q^i \text{ 的函數}$$

現在要證明軌道可由 ω，以及單微分形 $\tau = -dT + p^*F$，還有動能函數 T 所決定。首先我們有 $i(\partial/\partial t)\Omega = 0$，因此在 S 上當我們考慮新的軌道場 X 爲（6.6.1）式時，方程式（6.5.4）仍然成立，此即：

$$i(X)\Omega = \tau. \tag{6.7.4}$$

這說明 τ 應該落在餘切佈 E^* 之中。其次，我們由 (6.6.1) 及 (6.7.1)式可得：

$$\langle X, \omega \rangle = 2T - 1, \tag{6.7.5}$$

所以只需由 (6.7.4) 及 (6.7.5) 這兩式以及下面的定理，我們就能得出所想要的結果。

定理 6.7.1 假設 τ 爲餘切佈 E^* 中能被 $\partial/\partial t$ 所消滅的隨便一個單形，而令 f 爲 S 上的一個函數，則存在唯一的一個向量場 X 滿足：

(a) $i(X)\Omega = \tau$.

(b) $\langle X, \omega \rangle = f$.

證明大要：取 $X = f_i\, \partial/\partial p_i + g^i\, \partial/\partial q^i + h\, \partial/\partial t$, $\tau = a^i\, dp_i + b_i\, dq^i$，然後計算(a)及(b)的座標表達式。□

現在假設 P_i, Q^i 爲 T^*M 上的漢米頓座標，則有：

$$d(P_i\, dQ^i - p_i\, dq^i) = \Omega - \Omega = 0,$$

因此由定理 4.5.1 Poincaré 引理之逆可知存在一個函數 f 滿足：

$$P_i\, dQ^i - p_i\, dq^i = df.$$

若取 $u = t + f$ 則有 $\omega = P_i\, dQ^i - du$。因此 P_i, Q^i, u 正好是一組切觸座標。注意這時 P_i 及 Q^i 爲 T^*M 上的函數，我們就稱這種特別的切觸座標爲**齊次切觸座標** (homogeneous contact coordinates)。容易證明任何一個齊次切觸座標一定就像上面一樣可以由漢米頓座標得來。因此切觸座標是一種比漢米頓座標更爲一般的座標系統。既然操作切觸座標系統具有更多的自由度，這些座標系統就能給我們帶來更強的簡化力。

6.8 切觸流形

一個維數爲 $d = 2r + 1$ 的流形 M 之上若存在某個特定的單微分形 ω 滿

足條件：

$$\omega \wedge (d\omega)^r \neq 0.$$

我們就說這流形上具有一個**切觸結構**（contact structure）。一個具有切觸結構的流形就稱為**切觸流形**（contact manifold）。這時所考慮的單形 ω 也稱為一個**切觸形**（contact form）。注意在上面定義條件中 $d\omega$ 的冪次意指外積運算。

就如同上面所討論的在 $T^*M\times R$ 上的標準切觸結構一樣，我們可以在一個切觸流形上得出一個一維的切佈 E 以及其伴隨的餘切佈 E^*。E 可以認為是由 $\Omega = d\omega$ 所消滅的空間，此即：向量場 Y 落在 E 中當且唯當 $i(Y)\Omega = 0$。另方面若把 Ω 看成是從切向量到餘切向量的映射，則 E^* 可以看成這映射的值域，如果進一步加入條件 $\langle Y, \omega\rangle = 1$，我們可以在 E 中挑出一組特別的基。我們也把滿足這額外條件的向量場 $Y\in E$ 叫做一個切觸向量場。一般都能證明定理6.7.1對於隨便一個切觸結構均能成立。

在一個切觸流形上如果一組座標系統：

$$p_i, q^i, t, i = 1, \ldots, r,$$

能使得其切觸形寫起來正好等於：

$$\omega = p_i\, dq^i - dt.$$

則這組座標就叫做切觸座標。由下面這個Darboux定理，我們知道切觸座標一定存在。

定理 6.8.1 假設 ω 是個定義於 $m\in M$ 之鄰域上的單形。

(a) 如果在 m 點之某鄰域上：

$$\omega \wedge (d\omega)^k = 0 \text{ 以及 } (d\omega)^{k+1} = 0$$

可是在 m 點卻有 $(d\omega_m)^k \neq 0$ 及 $\omega_m \neq 0$，則必定存在座標系統於 m 點之某鄰域：

$$p_i, q^i \ (i = 1, \ldots, k), \ u^\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, d - 2k)$$

使得正好：

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} p_i \, dq^i.$$

(b) 如果在m點之某鄰域上$(d\omega)^{k+1} = 0$，可是在m點卻有：

$$\omega_m \wedge (d\omega_m)^k \neq 0,$$

則必定存在在m點某鄰域上的一組座標系統：

$$p_i, q^i \ (i = 1, \ldots, k), \ t, u^\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, d - 2k - 1)$$

使得正好：

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} p_i \, dq^i - dt.$$

注意在定理(b)項中當$k = r$時就指出一個切觸流形上一定存在有切觸座標。

假設M是個切觸流形而ω為其上的切觸形。則由這個ω所張開的餘切佈之相應的切佈就是由ω所消滅的$2r$維切佈D，給為

$$D(m) = \{x \in M_m \mid \langle x, \omega \rangle = 0\}.$$

這個D就稱為**切觸切佈**(contact distribution)。

一個M上的可微同胚f若能滿足$f^*\omega = h\omega$，其中h是M上的函數，在每點皆不為零，則f就稱為是M上的一個**切觸轉換**(contact transformation)。上面這定義條件也可以寫成$f_*D = D$。使用第4.10節中的技巧能證明D之積分子流形中其維數最高的為r。不僅如此，若取p_i，q^i，t為一組切觸座標，則所有的座標切片$q^i = c^i$，$t = c$都是D的r維積分子流形。因此我們可以使用下列定理來描述一個切觸轉換：

定理 6.8.2 切觸流形 M 上的一個可微同胚能夠把 D 的每一個最高維的積分子流形都映射到 D 的另一個積分子流形中的充要條件是這個可微同胚為 M 上的一個切觸轉換。

參考文獻

1. 基礎教材

Bartle, R. G., *The elements of real analysis*, Wiley, New York, 1964.
Kaplan, W., *Advanced calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.

2. 點集論與拓樸

Gaal, S. A., *Point set topology*, Academic Press, New York, 1964.
Hocking, J., and Young, G., *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.
Kelley, J., *General topology*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955.
Simmons, G., *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

3. 線性代數與矩陣理論

Greub, W., H., *Linear algebra*, 2nd ed. Academic Press, New York, 1963.
Hoffman, K., and Kunze, R., *Linear algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.
Hohn, F. E., *Elementary matrix algebra*, Macmillan, New York, 1964.
Marcus, M., and Minc, H., *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn & Bacon, Boston, 1964.

4. 微分方程式論

Birkhoff, Garrett, and Rota, Gian-Carlo, *Ordinary differential equations*, Ginn, Boston, 1962.
Coddington, E., and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
Greenspan, D., *Theory and solution of ordinary differential equations*, Macmillan, New York, 1960.

5. 古典張量分析

Eisenhart, L. P., *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1949.
Schouten, J., *Ricci calculus*, Springer, Berlin, 1954.
Sokolnikoff, I., *Tensor analysis*, Wiley, New York, 1964.

Spain, B., *Tensor calculus*, Interscience, New York, 1953.
Synge, J., and Schild, A., *Tensor calculus*, University of Toronto Press, Toronto, 1949.

6. 微分幾何

Auslander, L., and MacKenzie, R., *Introduction to differentiable manifolds*, McGraw-Hill, New York, 1963.
Flanders, H., *Differential forms*, Academic Press, New York, 1963.
Hicks, N., *Notes of differential geometry*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965.
Laugwitz, D., *Differential and riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1965.
O'Neill, B., *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York, 1966.
Struik, D., *Differential geometry*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.
Willmore, T. J., *An introduction to differential geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

索　引

A

acceleration 向量場 332
affine 仿射的 330
affine connexion 仿射連繫 335,337
affine structure 仿射結構 341
algebraic homotopy 代數同倫映射 271
angle 角度 320
angular momentum 角動量 405
annihilate 互相消滅 305
arc component 成分 22
arcwise connected 弧線連通的 21
area element 面積元素 294
axioms 公設 1

B

base curve 底線 328
basis form 基形 259
basis of neighborhoods 基本鄰域 15
boundary 邊界 14
boundary 緣 269
boundary operator 邊界運算 282
boundary value 邊界值 308
bounded 有界的 16
broken 片斷的 329
bundle isomorphism 束同構映射 389
bundle of differentials 可微形束 184

C

canonical 標準的 394
canonical contact form 標準切觸形 408
canonical lift 標準提昇 397,404
cap-shaped 帽型的 379
Cartesian product 卡式乘積 4
chain 方體鏈 275
characteristic 特徵數 227
characteristic function 特徵函數 9, 288
characteristics 特徵向量 308
chart 圖表 31
circle 圓圈 227
circular ridges 圓形山脊 226
circular valley 圓形谷 226
closure 閉包 13
coboundary operator 餘緣運算 303
cocycle 餘輪 303
compact 緊緻的 23
compatible 相諧的 280
compatible 相匹配 361
complement 餘集 3
complete 完全的 374
completely integrable 可積分的 233
complete inverse image map 逆像映射 8
component 成分 258
composition 合成函數 7
configuration 狀位 387
configuration space 狀位空間 184,400
connected 連通的 20
connected component 連通成分 21
conservation of momentum 動量保存 402
constant function 常數函數 19
contact coordinates 切觸座標 409
contact distribution 切觸切佈 412
contact form 切觸形 388,411
contact manifold 切觸流形 388,411
contact structure 切觸結構 411
contact transformation 切觸轉換 412
contraction 收縮運動 203
coordinate cube 座標方塊 269
coordinate p-form 座標p形 258
cotangential tensor field 餘切張量場 215
countable 可數的 9
countable 可數個 233
covariant differentiation 順變微分 335

covariant differential 顯變微分形 350
covering 遮 22
covering map 覆蓋映射 250
critical point 臨界點 218
curl 旋度 257
curvature 曲率 218
curvature forms 曲率形 354

D

density 密度 287
derivation 導運算 200
differentiable manifold 可微流形 31
discrete topology 離散拓樸 13
displacement vector 位移向量 294
displacement vector field 位移向量場 397
distance 距離 322
distance function 距離函數 15
distribution 切佈 360,397
divergence 散度 257
domain 定義域 6

E

empty function 空函數 7
energy 能量 322
energy-critical 能量臨界 329,375
energy-minimizing 能量極小 329
equivalence class 等價類 10
equivalence relation 等價關係 10
exact 恰當的 270,389
exponential map 指數映射 375
extension 延拓 404
exterior derivative 外導數 259

F

finite covering 遮 23
finite intersection property 有限相交性質 23
first integral 第一積分 233,234
flat 平直的 330
flow 流線 193
formal sum 形式和 275
forus 環面 222
fundamental bilinear form 基本雙線性形 319
fundamental form 基本形 389

G

gaussian curvature 高斯曲率 379
geodesic 測地線 218,334,369
geodesic spray 測地噴場 373
global coordinate 大域座標 232
gradient operator 梯度算子 257
graph 圖形 5
greatest lower bound 最大下限 322

H

hessian 赫斯式 219
holonomic 整則 405
homeomorphism 同胚映射 19
homeomorphism into 同胚映入 19
homogeneous 線性齊次 228
homogeneous contact coordinates 齊次切觸座標 410
hyperbolic plane 雙曲平面 218
hypercone 超光錐 323

I

identity 恒等元素 246
identity map 恒等映射 7
if and only if 當且唯當 2
image 影像 6
inclusion map 包含映射 7
index set 指標的集合 3
infinitesimal automorphism 自同構映射 393
infinitesimal transformations 無窮小的轉換 194
infinitesimal variation 無窮小變分 329
initial state 起始的狀況 406
initial value 始值 308
initial velocity 初速度 369
inner product 內積 260
integrability conditions 可積分條件 232
integral curve 積分曲線 188
integral submanifold 積分子流形 232
interior product 內消積 264
interior product 內消積運算 257

intersection 交集 3
interval 區間 20
intrinsic 內在的 209
intrinsic 內在 262
invariant subset 不變子集合 404
involutive 對合的 231
irreducible 不可化簡的 279
isolated 孤立的 221
isometry 保距同構 368
isomorphism 同構映射 7

K

kinetic-energy 動能 401
kinetic-energy metric 動能測距 402

L

Lagrangian multiplier Lagrangian 乘子 223
left invariant 左不變性 246
length 長度 320
length-critical 長度臨界的 329
length-minimizing 長度極小的 329
level sets 水平點集 225
level surface 水平曲面 223
Lie bracket 李乘積 205
light-like 光類的 323
limit 極限 19
linear momentum 線性動量 404,405
line integral 線積分 294
local basis 局部基 229
locally compact 局部緊緻的 25
locally exact 局部恰當的 270
locally finite 局部有限性 26
local one-parameter group 局部單參數群 195
longitudinal curves 經線 358
Lorentz metric 勞倫茲測距 319

M

manifold of events 事件的流形 387
maximal rank 極大秩 388,389
maximum point 最大點 219
metric 測距 15,319
metric space 賦距空間 17
minimum point 最小點 219
Minkowski space 敏氏空間 319
Mobius strip Mobius 帶 360
monkey saddle 猴鞍 222
Morse number 摩斯數 225
moving frame 移動支架 199

N

neighborhood 鄰域 14
nonholonomic 非整則 406
normal coordinate map 正則座標映射 376

O

object 客體 1
odd permutation 奇排列 247
one-parameter group 單參數群 194
onto 蓋射 6
open ball 開球 16
open covering 開遮 23
open set 開集合 13
ordered pair 有序對 4
orientable 可具號的 246,247
outward pointing normal 外指法向量 277
overdetermine 超定 364

P

paracompact 仿緊緻的 26
paracompactness 仿緊緻性 320
parallelizable 可平行化的 187,244
parallel translation 平行位移 344
parametrization by reduced arc length 簡化弧長參數化表示 321
partition of unity 單元分割 285
pass 隘口 226
p-cochain *p*餘鏈 303
p-cubes *p*方塊 275
peak 峰 226
perturb 擾動 225
p-form *p*形 258
phase space 相空間 184
phase space 動相空間 388,406
pit 坑 226

plane section 二維截面 378
polarized 偏極化 402
potential field 位能場 403
power map 冪映射 8
power set 冪集合 8
preimage 前像 214
product manifold 乘積流形 244
projection 投射 8
projective space 射影空間 248
proportionality class 比値類 248
pseudo-riemannian 半黎曼測距 187
p-simplex p 單體 281
pullbacks 回拉 357

Q

quadratic form 二次形 221
quadratic function 二次函數 225
quotient 商集 11

R

radial lines 徑線 380
radially symmetric 徑向對稱的 275
range, image, target 像域 6
rank 秩 221
rational number 有理數 10
rays 射線 358
realanalytic 實解析性 239
rectangle 平滑長方形 328
refinement 細緻的遮 26
regular 正則的 213
relation 關係 5
reparametrization 新參數表示 321
Riemann integral 黎曼積分 287
rigid object 剛體 405
rotation 旋轉 196
φ-related φ 相關的 213

S

saddle 鞍點 226
scalar bundle 係數束 184
second normal variations 第二法向變量 335
semi-riemannian metric 半黎曼測距 187
separable 可分離的 25
set 集合 1
simply connected 單連串的 269
skew-adjoint 反伴隨的 367
skew-adjointness 反伴隨 363
sliding 溜滑 407
solution function 解函數 233
space-like 空間類的 323
span 張開 230
standard flat metric 標準平値測距 325
state space 狀況空間 388,407
strongly equivalent 強等價 16
structural functions 結構函數 366
symmetric difference 對稱差 4
symmetrization 對稱化連繫 353
symplectic structure 斜細結構 388

T

tangent bundle 切束 241
tangent subbundle 切子束 231
tensor bundle 張量束 184
tetrahedran 金字塔形 281
time-like 時間類的 323
topological invariant 拓樸不變量 20
topology 拓樸 12
trajectories 軌道 403
translations 平移 404
transpose 轉置映射 215
transverse 互相橫截 236
transverse curves 橫截線 328
triangulation 三角化定理 285
twofold covering 雙層覆蓋 250
two-sidedness 雙面性 248

U

unio 聯集 3
unit radial field 單位徑向量場 196

V

variation 變分 329
vertical 垂直的 397

W

weighted mean 加權平均 352

weights 載重 352,353
work 功 290,402

X

X-component of momentum 動量X成份 395